Fonctions définies par une intégrale

Continuité

1 Théorème de continuité

Proposition 1 — Continuité d'une intégrale par rapport au paramètre, domination globale. Si f est une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

- Pour tout $x \in X$, la fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;
- Pour tout $t \in I$, la fonction $f_t : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X ;
- f vérifie l'hypothèse de domination.

alors, l'application

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$$

est définie et continue sur X.

Savoir faire 1
1. Donner l'ensemble de définition de F. Montrer que F n'est pas continue en 0.
2. Appliquer le théorème précédant à $F(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt} dt$ sur $X = [a,b]$ avec $a > 0$. Montrer que f ne vérifie pas l'hypothèse de domination sur $X = [0,b]$.

Savoir faire 2 Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} sin(xt^2)e^{-t}\,dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2 Domination locale

Il arrive, parfois, que la majoration sur tout l'ensemble X n'est pas possible, on peut dans ce cas, éventuellement, se contenter de prouver cette majoration sur tout segment de cet ensemble. C'est l'hypothèse de domination locale. D'où le théorème

Proposition 2 — Continuité d'une intégrale par rapport au paramètre (domination locale). Si f est une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

- Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;
- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X ;
- pour tout segment S de X, il existe une application φ_S à valeurs réelles positives telle que $\int_I \varphi_S(t)dt$ converge.

$$\forall x \in S,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leq \varphi_S(t) \quad \text{(hypothèse de domination sur le segment } S\text{)}$$

alors, l'application $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur X.

Savoir faire 3 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{sin(xt)}{t} e^{-t}\,dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Savoir faire 4 Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est continue sur $]0,+\infty[$