Fonctions définies par une intégrale

Dérivation sous le signe $\int_I$

1 Théorème de dérivation

Proposition 1 — Dérivation sous le signe $\int_I$. Si f est une application de $X \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

1. Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I et intégrable ;
2. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur X ;
3. Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I ;
4. Il existe une fonction φ positive, continue et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in X,\ \forall t \in I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t) \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

alors l'application $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur X et

$$\forall x \in X,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Savoir faire 1 Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(xt)}{t} e^{-t}\,dt$. Calculer F'. En déduire que $F = \arctan$

2 Domination locale

Savoir faire 2 Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que $\forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t}\,dt$