Equations différentielles

Résolution d'équations aux drivées partielles

Savoir faire 1 On note $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > |x|\}$. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ est une application de classe $\mathscr{C}^2$, vérifiant :

$$(\mathscr{E}) \quad : \quad \forall (x,y) \in U\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

1. (a) Représenter le domaine U.
   On pose $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (u = x+y, v = y-x) \end{array} \right.$
   (b) Montrer que φ est injective.
   (c) Représenter $V = \varphi(U)$.
2. On considère maintenant l'application $F : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & F(u,v) \end{array} \right.$ définie par :

$$F(u,v) = F(x+y, y-x) = f \circ \varphi^{-1}(u,v) = f(x,y)$$

   (a) Exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}(x+y, y-x)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}(x+y, y-x)$.
   (b) En déduire une équation différentielle vérifiée par F.
   (c) La résoudre.
   (d) Déterminer alors les solutions de $(\mathscr{E})$.