Éléments propres

Éléments propres d'un endomorphisme

1 Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ou non. On recherche les vecteurs qui ont même direction que leur image.

Définition 1 — Vecteur propre. On dit que $x \in E$ **non nul** est un vecteur propre de u lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Définition 2 — Valeur propre. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u lorsqu'il existe un vecteur $x \in E$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$

Lorsque $u(x) = \lambda x$, x étant **non nul**, on dit que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Définition 3 — Sous-espace propre. Si λ est une valeur propre de u, on appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ l'ensemble :

$$E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

2 Proporiétés

Proposition 1 Les sous-espaces propres d'un endomorphisme f de E sont stables par f.

Savoir faire 1 Preuve !

Proposition 2
1. λ est une valeur propre de u si et seulement si $\operatorname{Ker}(u - \lambda id_E) \neq \{0\}$
2. Si E est de dimension finie, λ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda id_E$ n'est pas un automorphisme.

Savoir faire 2 Preuve !

Proposition 3 Soit λ une valeur propre de u, alors E_λ est un sous-espace vectoriel de E et de plus :

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda id_E)$$

3 Lien avec des matrices

Proposition 4 Si M est la matrice de l'endomorphisme u dans une base $\mathscr{B}$, si X est la matrice d'un vecteur x dans la base $\mathscr{B}$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :
1. λ valeur propre de M si et seulement si λ valeur propre de u.
2. X vecteur propre de M associé à la valeur propre λ si et seulement si x vecteur propre de u associé à la même valeur propre λ.

Proposition 5 Si M est la matrice de u dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ alors :

M est de la forme $M = \begin{pmatrix} ? & & & 0 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & ? & 0 & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & 0 & ? & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & & ? \end{pmatrix}$ si et seulement si e_j est un vecteur propre de u associée à la valeur propre λ

Savoir faire 3 Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x+y+z, x+y+z) \end{array} \right.$. Déterminer deux valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

Savoir faire 4 E est l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme : $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

1. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de E.
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres et déterminer les valeurs propres associées.
3. Montrer que la famille (v_1, v_2) est une base de E.
4. Donner la matrice D de l'application f dans la base (v_1, v_2).
5. Donner une relation entre D, A, et P une matrice de passage que l'on précisera.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de la relation précédente, calculer A^n.