Probabilités

Ensembles dénombrables

Définition 1 Un ensemble dénombrable est un ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$.
Un ensemble est dit *au plus dénombrable* s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Proposition 1 $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Savoir faire 1 Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable en considérant l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} n/2 \text{ si } n \text{ pair} \\ -(n-1)/2 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$
est bijective.

Proposition 2 $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Savoir faire 2 **Preuve :**

Idée : on étiquette chaque point du quadrillage en balayant les diagonales de bas en haut.

1. Le couple (i, j) se trouve sur la diagonale numéro $i + j = k$.
2. On compte le nombre de points sur chaque diagonale : avant la k-ième diagonale, il y a $2+3+\cdots+k$ points.
3. On ajoute les $j+1$ points manquants.

Proposition 3 Si E et F sont dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.

Savoir faire 3 Soit ψ une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans N, φ_1 une bijection de E dans $\mathbb{N}$ et φ_2 une bijection de F dans $\mathbb{N}$.
Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & N \\ (x,y) & \longmapsto & \psi(\varphi_1(x), \varphi_2(y)) \end{array} \right.$ est bijective.

Proposition 4 On admet que $\mathbb{R}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.

Savoir faire 4 Les univers des quatre premiers exercices sont-ils finis ? dénombrables ? non dénombrables ?