Probabilités

Tribu

1 Remarques sur les définitions de première année

Définition 1 — Rappel : probabilités sur un univers fini. Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité une application $\mathscr{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si A et B sont des événements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Remarque

1. Cette définition ne permet de travailler que sur des univers finis. Comment faire dans les autres cas ?
   Nous allons redéfinir ce qu'est une probabilité en donnant une définition compatible avec celle de première année.
2. La probabilité est une fonction qui calcule l'image d'ensembles.
   Il faut définir une structure d'ensembles qui permette de travailler : c'est ce que l'on appellera la tribu.

2 Réunion et intersection dénombrable

Définition 2 — Réunion et intersection dénombrables. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable de parties d'un ensemble Ω. On note :

1. $\cup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in \Omega \mid \exists \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$
2. $\cap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in \Omega \mid \forall \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$

Savoir faire 1 Deux joueurs lancent une pièce à tour de rôle. Le premier qui obtient "face" gagne. On note : A="victoire du premier joueur", D="pas de vainqueur", F_i="fin de partie au i-ème lancer" et enfin P_i="pile au i-ème lancer"

1. Ecrire D en fonction des P_n.
2. Ecrire A en fonction des F_i.
3. Ecrire F_n en fonction des P_i.
4. Ecrire A en fonction des P_i.

Remarque : Ω n'a pas été explicité, ici

$$\Omega = \{(\underbrace{P, P, P, \dots, P, F}_{n \text{ lancers}}) \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\omega_\infty\}$$

Savoir faire 2 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable de parties de Ω.

1. Montrer que $\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$.
2. En déduire $\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$

3 Définition

La probabilité sera définie sur un ensemble $\mathscr{A}$ sur lequel on est amené à effectuer des intersections, réunions, passages au complémentaire... Voici les propriétés qu'il est raisonnable d'exiger :

Définition 3 — Tribu. Soit Ω un ensemble non vide. Une tribu de Ω est un ensemble $\mathscr{A}$ dénombrable formé de parties de Ω vérifiant :

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. si $\mathscr{A} \in A$, alors $\bar{\mathscr{A}} \in A$. (stabilité par passage au complémentaire)
3. si (A_n) est une suite d'événements de $\mathscr{A}$ alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est également dans $\mathscr{A}$. (stabilité par réunion dénombrable)

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace probabilisable.

Remarque La stabilité par réunion dénombrable entraîne la stabilité par réunion finie en posant $\forall n \geq 2\,, A_n = \emptyset$.

Exemple

1. $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}$
2. tribu exhaustive
3. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathscr{A} = \{\Omega, \emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$

Savoir faire 3 Compléter $\mathscr{A}$ pour que ce soit une tribu (la plus petite possible) : $\mathscr{A} = \{\{1,2\}, \{3\}, \dots\}$

Savoir faire 4 Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

1. Montrer que si A et B sont des événements, alors $A \setminus B$ est encore un événement.
2. Montrer que $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable.