Probabilités

Probabilité

1 Définition

La nouvelle définition de probabilité qui est introduite ici nous permettra de travailler avec des familles dénombrables d'événements :

Définition 1 — Probabilité. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisé. On appelle probabilité une application $\mathscr{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements 2 à 2 incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad \text{(propriété de } \sigma\text{-additivité)}$$

Le triplé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ est appelé espace probabilisé.

Savoir faire 1 On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir "Face" puis on s'arrête. A_n="On effectue n lancers au total.

1. Rappeler ce qu'est $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$
2. En admettant que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n}$, calculer $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

2 Propriétés

Proposition 1 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, alors $P(\emptyset) = 0$.

Savoir faire 2 Preuve : Soit (A_n) une famille d'événements 2 à 2 incompatibles. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$.
En particulier, si tous les A_n sont vides, il vient $P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$ et donc $P(\emptyset) = 0$.

Si à partir du rang 2 tous les A_n sont vides et si $P(\emptyset) = 0$, on retrouve la définition d'une probabilité vue en première année. D'où les propriétés suivantes :

Proposition 2 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, A et B dans $\mathscr{A}$. Alors :

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Proposition 3 — Cas où Ω est dénombrable. Soit $\Omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :

1. $\forall A \in \mathscr{A}$, $P(A) = \displaystyle\sum_{\omega_n \in A} P(\{\omega_n\})$.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{\omega_n\}) = 1$

alors P est une probabilité.

Savoir faire 3 Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Soit $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que $\forall A \in \mathscr{A}$, $P(A) = \sum_{k\in A} P(\{k\})$ et telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(\{k\}) = \frac{\alpha}{n!}$. Déterminer α pour que P soit probabilité.

3 Continuité croissante

On relance une pièce jusqu'à obtenir "Face". Cherchons à calculer la probabilité de D="Le jeu ne s'arrête jamais". Intuitivement : la proba que les n premiers lancers soient des piles est $\frac{1}{2^n}$, on aimerait alors passer à la limite et écrire $P(D) = \lim \frac{1}{2^n} = 0$... Est-il légitime de le faire ?

Proposition 4 — Continuité croissante. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements (au sens de l'inclusion). Alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$$

Savoir faire 4 **Preuve :**

On pose $B_0 = A_0$ et, pour tout $n > 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.

On remarque d'abord que la suite $(P(A_n))$ est croissante et majorée par 1. Elle admet bien une limite.

2. Montrons que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.
3. Montrons que pour tout $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$.
4. Finalement :

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) \\
&= P(A_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \setminus A_{n-1}) \\
&= P(A_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} (P(A_n) - P(A_{n-1})) \\
&= \lim_{n \leftarrow +\infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

Proposition 5 — Continuité décroissante. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements (au sens de l'inclusion). Alors :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$$

Savoir faire 5 Preuve

Savoir faire 6 **Retour sur l'exercice**

On pose B_n"="les n premiers lancers sont des piles". Alors $D = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements. Il est donc légitime d'écrire : $P(D) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim P(B_n) = 0$.

Proposition 6 — Sous-additivité finie et dénombrable. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Alors :

1. $P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{N} P(A_n)$ (sous-additivité finie).
2. dans le cas où la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ converge, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ (sous-additivité dénombrable).

Savoir faire 7 Preuve !