Probabilités

Indépendance et probabilité conditionnelle

1 Evénements independants

Définition 1 Soit P une probabilité sur un univers fini Ω et $(A_1,\dots,A_N)$ une famille d'événements. On dit que les événements de cette famille sont 2 à 2 indépendants lorsque :

$$\forall i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Définition 2 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et (A_n) une famille dénombrable d'événements. On dit que les événements de cette famille sont 2 à 2 indépendants lorsque :

$$\forall i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Savoir faire 1 On lance 2 dés.
A est l'événement "le résultat du dé 1 est supérieur ou égal à 4". B est l'événement "le résultat du dé 2 est pair".
Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Sont-ils indépendants ?

2 Probabilité conditionnelle

Théorème 1 Soit P une probabilité sur un univers fini Ω et A un événement tel que $P(A) \neq 0$. L'application $P_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ B & \longmapsto & \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{array} \right.$ est une probabilité sur Ω. On l'appelle probabilité conditionnelle relative à A. $P_A(B)$ est appelé probabilité de B sachant A. Elle est également notée $P(B|A)$.

Théorème 2 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(a) \neq 0$.
L'application $P_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ B & \longmapsto & \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{array} \right.$ est une probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A})$. On l'appelle probabilité conditionnelle relative à A. $P_A(B)$ est appelé probabilité de B sachant A. Elle est également notée $P(B|A)$.

Savoir faire 2 Un couple a deux enfants.
Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un garçon ?
Quelle est la probabilité qu'il y ait un garçon sachant qu'ils ont une fille ?

3 Formule des probabilités composées

Définition 3 — Système complet d'événements . Soit Ω un univers fini. On appelle système complet d'événements une suite $(A_1,\dots,A_n)$ telle que :

1. $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ (Les événements sont incompatibles 2 à 2)
2. $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

Définition 4 — Système complet d'événements. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle système complet d'événements une famille $(A_n)_{n\in I}$ au plus dénombrable d'événements telle que :

1. $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ (Les événements sont incompatibles 2 à 2)
2. $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$

Savoir faire 3 Retour sur l'exo : 2 joueurs lancent une pièce à tour de rôle et le premier qui tombe sur "Face" gagne. On note :
- A="le premier joueur gagne"
- B="le second joueur gagne"
- D="pas de gagnant"
- F_i="Face au i-ème tirage

Alors :
- (A,B,D) forme un système complet d'événements de cardinal fini.
- la famille formée de D et de tous les F_i forme un système complet d'événements. Cette famille est cette fois dénombrable.

Théorème 3 Soit P une probabilité sur un univers fini Ω et $(A_1,\dots,A_N)$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_N) \neq 0$. Alors : $P(A_1 \cap \dots \cap A_N) = P(A_1).P(A_1|A_2).P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P(A_N|A_1 \cap \dots \cap A_{N-1})$

Théorème 4 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé et $(A_1,\dots,A_N)$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_N) \neq 0$. Alors : $P(A_1 \cap \dots \cap A_N) = P(A_1).P(A_1|A_2).P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P(A_N|A_1 \cap \dots \cap A_{N-1})$

Savoir faire 4 Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise 3 boules. On note B_i l'événement "avoir une boule blanche au i-ème tirage".
1. Quelle est la probabilité d'avoir d'abord 2 boules noires puis une blanche ?
2. Illustrer le résultat en utilisant un arbre.

4 Formule des probabilités totales

Théorème 5 Soit P une probabilité sur Ω et $(A_1,\dots,A_N)$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{N} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{N} P(B|A_n)P(A_n)$$

Théorème 6 Soit $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B, la série de terme général $P(B \cap A_n)$ est convergente et :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

Savoir faire 5 Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise 3 boules. On note B_i l'événement "avoir une boule blanche au i-ème tirage".
1. Quelle est la probabilité d'obtenir après les trois tirages 2 boules noires et une blanche ?
2. Illustrer le résultat en utilisant un arbre.

5 Formules de Bayes

Théorème 7 Soit P une probabilité sur un univers fini Ω et (A,B) un couple d'événements de probabilités non nulles. Alors,

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}P(B|A)$$

Théorème 8 Soit $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé et (A,B) un couple d'événements de probabilités non nulles. Alors,

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}P(B|A)$$

Théorème 9 Soit P une probabilité sur un univers fini Ω , B un événement de probabilité non nulle et $(A_1, \dots A_N)$ un système complet d'événements de probabilités également non nulles. Alors,

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{n=1}^{N} P(B|A_n)P(A_n)}$$

Théorème 10 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, B un événement de probabilité non nul et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités également non nulles. Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)}$$

Savoir faire 6 Une maladie touche 0.1% de la population. Un test permettant de déceler cette maladie est :
- positif chez 90 % des personnes qui ont la maladie.
- négatif chez 90 % des personnes qui n'ont pas la maladie.

Montrer que pratiquement tous les tests positifs désignent des personnes saines. Illustrer à l'aide d'un arbre. D'où vient le problème ?

Savoir faire 7 Un magasin a n caisses. La probabilité qu'il y ait k clients dans le magasin est $p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. La caisse 1 a vu passer m clients un jour donné. On note les événements suivants : A_k="Il y a k clients dans la magasin"
B="Il y a m clients à la caisse 1"

1. Calculer $P(B|A_k)$
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu $m.n$ clients ce même jour ?

Indications

1. On fait ici l'hypothèse que les clients choisissent leur caisse indépendamment les uns des autres et que le choix des caisses est équiprobable. La probabilité qu'un client choisisse la caisse 1 est alors de $\frac{1}{n}$ et le nombre de clients à la caisse 1 suit une loi binomiale : c'est la probabilité d'avoir m succès (choix de la caisse 1) sachant qu'il y a eu k expériences (personnes entrées dans le magasin).
2. On cherche simplement à calculer $P(A_{mn}|B)$ et on utilise pour cela la seconde formule de Bayes...