Probabilités

Variables aléatoires discrètes

1 Variable aléatoire

Définition 1 — Variable aléatoire discrète. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et $X : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que X est une variable aléatoire discrète lorsque :
- $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable.
- si $x \in X(\Omega)$ alors $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est dans $\mathscr{A}$.

L'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est encore noté $(X = x)$

Si $A \subset X(\Omega)$ alors $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = \cup_{x \in A}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est une réunion dénombrable d'événements et donc un événement.

Dans la suite du cours, si X est une variable aléatoire discrète, on notera $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Savoir faire 1 Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ avec n un entier pair. On pose également $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathscr{S} = \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathscr{C} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$.

X est la fonction définie sur Ω par $X(\omega_i) = (-1)^i$. X est-elle une variable aléatoire sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{S})$? sur l'espace $(\Omega, \mathscr{C})$?

2 Loi d'une v.a.

Définition 2 — Loi d'une variable aléatoire. Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle loi de X l'application

$$P_X : \left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & P(X = x) \end{array} \right.$$

Savoir faire 2 On répète un lancer de pièce équilibrée jusqu'à l'obtention de "Pile". Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers. Décrire $X(\Omega)$ et la loi de X.

Théorème 1 Soit X une variable aléatoire discrète. On pose $p_n = P(X = x_n)$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$

Preuve :

Il suffit de montrer que $((X = x_n))$ forme un système complet d'événements.

Savoir faire 3 Calculer cette somme dans l'exercice précédent.

Théorème 2 — Réciproquement. soit l'ensemble dénombrable $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Alors on peut construire une variable aléatoire X et un ensemble probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = x_n) = p_n$$

Preuve :

Admise

3 Moments d'une variable aléatoire

Définition 3 — Définition de l'espérance. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n.P(X=x_n)$ converge absolument, alors sa somme est appelée espérance de X et se note $E(X)$.

Savoir faire 4 On répète un lancer de pièce équilibrée jusqu'à l'obtention de "Pile". Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers. Calculer l'espérance de X.

Proposition 3 L'espérance est linéaire. Autrement dit si X et Y sont deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(X+\lambda Y)=E(X)+\lambda E(Y)$

Preuve :

Admise

Proposition 4

— Si X est une v.a. positive (c'est à dire $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant 0$), alors $E(X) \geqslant 0$.

— Si $X \leqslant Y$ (c'est à dire $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant Y(\omega)$), alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Savoir faire 5 Preuve

Savoir faire 6 Soit X une variable aléatoire, $a \in \mathbb{R}$ et $Y=\max(X,a)$. Comparer $E(X)$ et $E(Y)$.

Proposition 5 — Théorème de transfert. Soit $f : X(\Omega)) \to \mathbb{N}$. Alors la variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n).P(X=x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, sa somme est $E(f(X))$.

Preuve :

Admise

Savoir faire 7 On répète un lancer de pièce équilibrée jusqu'à l'obtention de "Pile". Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers. Calculer l'espérance de X^2.

Définition 4 Lorsque X^k est d'espérance finie alors on dit que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre k

Définition 5 — Variance. Si X^2 est d'espérance finie alors X est d'espérance finie et on appelle variance le réel $V(X)=E((X-E(X))^2)$. L'écart type de X est noté $\sigma(X)$ et défini par $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Proposition 6 Soit X une variable aléatoire avec X^2 d'espérance finie.

1. $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$
2. pour tout λ et μ réels, $V(\lambda X+\mu)=\lambda^2 V(X)$

Savoir faire 8 Faire la preuve.

Savoir faire 9 On répète un lancer de pièce équilibrée jusqu'à l'obtention de "Pile". Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers. Calculer $V(X)$.

4 Couples de variables aléatoires

Définition 6 Si X et Y admettent des moments d'ordre 2, on appelle covariance du couple de variables aléatoires (X,Y) le réel $E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$. On le note $cov(X,Y)$.

Définition 7 Si X et Y admettent des moments d'ordre 2, on appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y le réel $\rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Définition 8 Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes lorsque :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\,,\, P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(X=y)$$

Proposition 7 Si X et Y admettent des moments d'ordre 2 et sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Preuve :
Admis

Proposition 8 Si X et Y admettent des moments d'ordre 2, alors $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Savoir faire 10 Faire la preuve.

Proposition 9 X et Y admettent des moments d'ordre 2. Montrer que $V(aX+bY) = a^2V(X)+b^2V(Y)+2ab.cov(X,Y)$.

Savoir faire 11 Faire la preuve.

Savoir faire 12 Soit X et Y qui admettent des moments d'ordre 2 et sont indépendantes. Que dire de $cov(X,Y)$ et $V(X+Y)$? La réciproque est-elle vraie ?

Proposition 10 $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$.

Preuve :
Voir le cours d'algèbre.

Savoir faire 13 On joue deux coups indépendants de pile ou face avec une pièce non truquée. Les variables X_1 et X_2 prennent les valeurs $+1$ ou -1 selon que le jème coup donne pile ou face. On pose $Y_1 = X_1 + X_2$ et $Y_2 = X_1.X_2$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y_1 et Y_2 et déterminer la loi de (Y_1, Y_2).
2. Calculer $E(Y_1)$, $E(Y_2)$ et $cov(Y_1, Y_2)$.
3. Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?