Probabilités

Loi de Poisson

Définition 1 On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si pour tout entier k on a

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Savoir faire 1 La durée d'un match de foot est divisé en n intervalles. La probabilité qu'un but soit marqué lors d'un intervalle est p. On note X la variable aléatoire du nombre de buts marqués pendant le match.

1. Quelle est l'espérance de X ? On note λ cette espérance.
2. Que vaut $P(X = k)$?
3. On fixe la valeur de λ et on fait tendre p vers 0. Comment varie alors n ? Montrer que

$$\lim_{p \to 0} P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Savoir faire 2 On pose $n = 20$ et $p = 0.1$ et $\lambda = pn$. X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ et Y une loi de poisson de paramètre $\mathscr{P}(\lambda)$. Représenter sur un même histogramme les valeurs de $P(X = k)$ et $P(Y = k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 9$.

Savoir faire 3 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que $E(X) = V(X) = \lambda$.

Savoir faire 4 Soit X et Y deux variables aléatoires qui suivent des lois de Poisson indépendantes de paramètre λ et μ respectivement. Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.