Éléments propres

Familles de vecteurs propres

Proposition 1 Soit x_1 et x_2 des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Alors :

1. (x_1, x_2) est une famille libre.
2. $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$

Savoir faire 1 Preuve !

Proposition 2 Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Savoir faire 2 Preuve : On procède par récurrence.

Initialisation : Le résultat est évident pour une famille d'un seul vecteur propre. Il a également été montré dans la proposition précédente dans le cas d'une famille de deux vecteurs propres.

Hérédité : On suppose le résultat vrai pour une famille de n vecteurs propres de ff. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs associés aux valeurs propres (distinctes) $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ et

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \cdots + \alpha \varepsilon_{n+1} = 0 \quad (\mathscr{E}_1)$$

une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs.

En composant cette combinaison linéaire par f, on obtient

$$\alpha_1 \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \varepsilon_{n+1} = 0 \quad (\mathscr{E}_2)$$

Si on la multiplie par λ_{n+1}, on obtient :

$$\lambda_{n+1} \alpha_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_{n+1} \alpha_n \varepsilon_n + \lambda_{n+1} \alpha_{n+1} \varepsilon_{n+1} = 0 \quad (\mathscr{E}_3)$$

En effectuant la différence de ces deux équations, il vient :

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) \varepsilon_1 + \cdots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \varepsilon_n = 0$$

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une famille de n vecteurs associés à des valeurs propres distinctes. Elle est donc libre d'après l'hypothèse de récurrence. Comme les λ_i sont distincts deux à deux, on en déduit que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ et il s'en suit $\alpha_{n+1} = 0$.

Savoir faire 3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que 0 est valeur propre et déterminer ε_1 un vecteur propre associé.
2. On pose $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} - 5 \\ \sqrt{6} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{6} - 5 \\ -\sqrt{6} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que ce sont des vecteurs propres de A.
3. Justifier (sans calcul) que la famille formée de ces trois vecteurs propres est libre.

4. En déduire une matrice P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP$.