

Devoir non-surveillé n°4
Exercice 1

Soit x un scalaire différent de ± 1 . Calculer les déterminants suivants

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

On montrera que $(\Delta_n)_{n \geq 0}$, est solution d'une équation de récurrence d'ordre 2, puis on donnera une expression explicite de Δ_n en fonction de n .

Exercice 2

On considère le système suivant, d'inconnues (x, y, z) :

$$\begin{cases} \lambda x + 2\lambda y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre complexe λ , ce système a-t-il une unique solution ? Quelles sont, dans le cas contraire, les solutions du système ?
2. Mêmes questions avec le système

$$\begin{cases} -x - 3y - 3z = \lambda x \\ 3x + 5y + 3z = \lambda y \\ -3x - 3y - z = \lambda z \end{cases}$$

3. Quelles sont les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$?