Devoir surveillé n°1

Sans calculatrice et sans document.
Ce devoir de 2h contient 2 exercices (17 questions)
Lisez entièrement l'énoncé avant de commencer !
À tout moment, il est autorisé d'admettre les résultats d'une question pour continuer.
Faites usage des brouillons afin de rendre une copie *impeccable*.
Soignez les rédactions qui constituent une part prépondérante de la notation.

I. Intégration

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que pour tout $t \geqslant 0$, $\frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}} \geqslant 0$ et donner un équivalent simple de $\frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}$ en 0.

   Pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$ donc $\frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}} \geqslant 0$.
   Le développement limité de e^{-t} en 0 est :
   $$e^{-t} = 1 - t + o(t).$$
   Donc $\frac{1-e^{-t}}{t}$ a pour limite 1 lorsque $x \to 0$ et $\frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$.

2. Que peut-on alors dire de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$?

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente.
   Par équivalence, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ converge (les fonctions étant positives).

3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   Pour tout $t \geqslant 0$, $\frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}} \leqslant \frac{1}{t^{3/2}}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente.
   Par comparaison (les fonctions étant positives) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

4. Conclure.

   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

On souhaite maintenant obtenir un majorant de I.

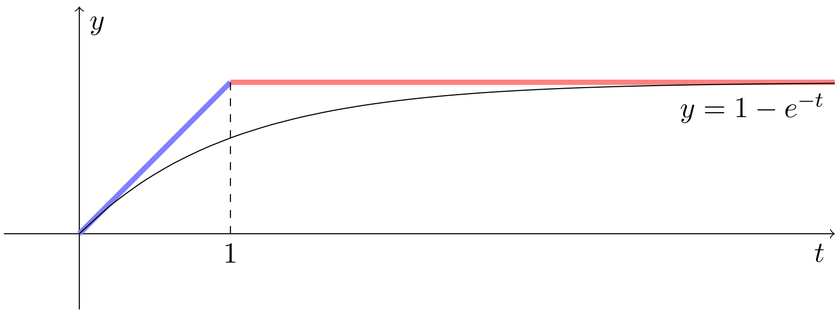
5. Montrer que
$$\forall t \in [0,1], \quad 1 - e^{-t} \leqslant t \qquad \text{et} \qquad \forall t \geqslant 1, \quad 1 - e^{-t} \leqslant 1$$

L'inégalité de droite est immédiate. Celle de gauche peut s'obtenir de plusieurs façons :

- étudier la fonction annexe $f(t) = 1 - e^{-t} - t$ qui est décroissante ($f'(t) = e^{-t} - 1 \leqslant 0$) sur $[0, 1]$ et nulle en $t = 0$.
- utiliser le théorème des accroissements finis avec la fonction $g(t) = e^{-t}$ entre 0 et t : $g(0) - g(t) = (0 - t)g'(c)$ pour un certain $c \in [0, t]$:

$$1 - e^{-t} = -t \cdot (-e^{-c}) = t \cdot e^{-c} \leqslant t.$$

- utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange...



6. Utiliser ces deux inégalités pour obtenir une majoration de I.

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{3}{2}-1} \qquad \text{(résultat de cours)} \\
&\leqslant 4.
\end{aligned}$$

II. Projection

Les trois parties sont largement indépendantes.

A. Étude d'un endomorphisme

Dans tout l'exercice, k est un réel fixé, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (dimension quelconque).

On définit une application f par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 + k \cdot x_2. \end{array} \right.$$

7. Montrer que f est linéaire.

Soit x et y dans E et λ dans $\mathbb{R}$. F et G étant supplémentaires dans E, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. De la même manière, y se décompose de façon sous la forme $y = y_1 + y_2$ avec $(y_1, y_2) \in F \times G$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= f(\underbrace{\lambda x_1 + y_1}_{\in F} + \underbrace{\lambda x_2 + y_2}_{\in G}) \\ &= (\lambda x_1 + y_1) + k(\lambda x_2 + y_2) \\ &= \lambda(x_1 + k \cdot x_2) + (y_1 + y_2) \\ &= \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

8. Que vaut f si $k = 1$?
Comment appelle-t-on une telle application lorsque $k = 0$?
lorsque $k = -1$?

Si $k = 1$ alors $f = \mathrm{id}_E$.
Si $k = 0$ alors f est la projection sur F parallèlement à G.
Si $k = -1$ alors f est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

Dorénavant, on suppose $k \neq 1$.

9. Prouver que $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. On admettra que $G = \mathrm{Ker}(f - k \cdot \mathrm{id}_E)$.

Par double inclusion :

- Montrons d'abord que $F \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$:
  Soit x in F. Alors $f(x) = x$ et donc $(f - \mathrm{id}_E)(x) = 0$. On a bien $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
- Montrons maintenant que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \subset F$.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. Alors $f(x) = x$ et en écrivant $x = x_1 + x_2$ il vient :

$$x_1 + k \cdot x_2 = x_1 + x_2$$

  et donc $(k - 1)x_2 = 0$. Comme $k - 1 \neq 0$, $x_2 = 0$ et donc $x = x_1 \in F$.

Puisque $F \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \subset F$, on a bien $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = F$.

10. Montrer que $f^2 - (1 + k)f + k \cdot \mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

NB : f^2 désigne ici $f \circ f$.

Soit $x = x_1 + x_2 \in F \oplus G$.

$$\begin{aligned} (f^2 - (1 + k)f + k \cdot \mathrm{id}_E)(x) &= f^2(x) - (1 + k)f(x) + k \cdot x \\ &= f(x_1 + k \cdot x_2) - (1 + k)(x_1 + k \cdot x_2) + k(x_1 + x_2) \\ &= x_1 + k^2 \cdot x_2 - (x_1 + k \cdot x_2 + k \cdot x_1 + k^2 x_2) + (k \cdot x_1 + k \cdot x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

B. Réciproque

Réciproquement, soit g un endomorphisme de E vérifiant $g^2-(1+k)g+k\cdot \mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On suppose toujours $k\neq 1$ et on souhaite montrer qu'il existe F et G, supplémentaires dans E, tels que

$$g\ :\left\{\begin{array}{ccc} E=F\oplus G & \longrightarrow & E \\ x=x_1+x_2 & \mapsto & x_1+k\cdot x_2. \end{array}\right.$$

11. Quels sont les bons candidats pour F et G ?

On veut montrer que g vérifie $g\ :\left\{\begin{array}{ccc} E=F\oplus G & \longrightarrow & E \\ x=x_1+x_2 & \mapsto & x_1+k\cdot x_2. \end{array}\right.$
D'après la question (**??**), on a nécessairement : $F=\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_E)$ et $G=\mathrm{Ker}(g-k\cdot\mathrm{id}_E)$.

12. Montrer que $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(g-k\cdot\mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E. On pourra s'aider de la décomposition suivante :

$$x=\frac{g(x)-k\cdot x}{1-k}+\frac{x-g(x)}{1-k}$$

- Montrons d'abord que $E=F+G$.
  Avec la décomposition qui nous est donnée, il suffit de montrer que $\frac{g(x)-k\cdot x}{1-k}\in F$ et que $\frac{x-g(x)}{1-k}\in G$. Cela est bien réalisé car :
  $(g-\mathrm{id}_E)\left(\frac{g(x)-k\cdot x}{1-k}\right)=\frac{1}{1-k}(g^2(x)-(1+k)g(x)+k\cdot x)=0$ (et donc $\frac{g(x)-k\cdot x}{1-k}\in F$).
  $(g-k\cdot\mathrm{id}_E)\left(\frac{g(x)-x}{1-k}\right)=\frac{1}{1-k}(g^2(x)-(1+k)g(x)+k\cdot x)=0$ (et donc $\frac{x-g(x)}{1-k}\in G$).
- Montrons maintenant que $F\cap G=\{0_E\}$.
  Soit $x\in F\cap G$. Alors $g(x)=k\cdot x$ et $g(x)=x$. On en déduit que $(k-1).x=0$ et comme $k-1\neq 0$, on a bien $x=0$ et $F\cap G\subset\{0_E\}$.

Puisque $E=F+G$ et $F\cap G=\{0_E\}$, les sous-espaces F et G sont bien supplémentaires dans E.

13. Comment trouve-t-on la décomposition de la question précédente ?

Il suffit de chercher x_1 et x_2 tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & x_1+x_2 \\ g(x) & = & x_1+k\cdot x_2. \end{array}\right.$$

La résolution du système donne bien $x_1=\frac{g(x)-k\cdot x}{1-k}$ et $x_2=\frac{x-g(x)}{1-k}$.

14. Conclure.

On vient de montrer qu'il existe F et G supplémentaires dans E en choisissant $F=\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_E)$ et $G=\mathrm{Ker}(g-k\cdot\mathrm{id}_E)$. Calculons maintenant l'image d'un élément $x=x_1+x_2\in E\oplus F$.

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & g(x_1+x_2) \\ & = & g(\underbrace{x_1}_{\in\mathrm{Ker}\,(g-\mathrm{id}_E)})+g(\underbrace{x_2}_{\in\mathrm{Ker}\,(g-k\cdot\mathrm{id}_E)}) \\ & = & x_1+k\cdot x_2 \end{array}$$

On a bien montré :

$$g\ :\left\{\begin{array}{ccc} E=F\oplus G & \longrightarrow & E \\ x=x_1+x_2 & \mapsto & x_1+k\cdot x_2. \end{array}\right.$$

C. Exemple numérique

Dorénavant, $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et
$G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où l'on a posé

$$\varepsilon_1 = (1,0,2), \qquad \varepsilon_2 = (1,1,1), \qquad \varepsilon_3 = (1,1,0).$$

15. Justifier que $E = F \oplus G$.

F a pour base (ε_1) et G a pour base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ (en effet, cette famille est bien libre !).
Or, en réunissant ces bases, on trouve une famille dont le rang vaut

$$\mathrm{rg}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = 3.$$

Cela prouve que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ d'après un théorème de cours.

16. Donner, dans la base canonique, la matrice P de la projection sur F parallèlement à G.
Vérifier que $\mathrm{tr}(P) = \mathrm{rg}(P) = \dim(F)$.

On cherche à exprimer les composantes de chaque vecteur de la base canonique selon $F \oplus G$.
On peut donc s'intéresser à leurs coordonnées dans $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Après calculs, on trouve que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} (1,0,0) & = & \varepsilon_1 & +(-2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3) & = & (1,0,2) & -2\cdot(1,1,1) & +2\cdot(1,1,0) \\ (0,1,0) & = & -\varepsilon_1 & +(2\varepsilon_2 - \varepsilon_3) & = & (-1,0,-2) & +2\cdot(1,1,1) & -1\cdot(1,1,0) \\ (0,0,1) & = & \underbrace{0}_{\in F} & +\underbrace{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}_{\in G} & = & \underbrace{(0,0,0)}_{\in F} & +1\cdot(1,1,1) & -1\cdot(1,1,0) \end{array}\right.$$

Les composantes selon F s'en déduisent ! Notons p la projection sur F parallèlement à G :

$$\left\{\begin{array}{ccc} p(1,0,0) & = & (1,0,2) \\ p(0,1,0) & = & (-1,0,-2) \\ p(0,0,1) & = & (0,0,0) \end{array}\right. \qquad \text{soit} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La formule $\mathrm{tr}(P) = \mathrm{rg}(P) = \dim(F)$ est une simple vérification.

17. Justifier que $Q = I_3 - P$ est la matrice de la projection sur G parallèlement à F.
Donner alors la matrice de l'application ci-dessous dans la base canonique :

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 + k\cdot x_2. \end{array}\right.$$

Notons q la projection sur G parallèlement à F.
Soit $x \in \mathbb{R}^3$ dont la décomposition selon $F \oplus G$ est $x_1 + x_2$ (autrement dit $p(x) = x_1$ et $q(x) = x_2$).
Nous avons donc $q(x) = x - p(x)$. Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on en déduit $q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - p$.
En termes de matrices, cette égalité donne $Q = I_3 - P$.

Ceci permet de conclure puisque nous voyons que $f = p + k\cdot q$:

$$\mathscr{M}_{\text{base can.}}(f) = P + k\cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 2-2k & -2+2k & k \end{pmatrix}.$$