Devoir surveillé n°1

Sans calculatrice et sans document.
Ce devoir de 2h contient 2 exercices (17 questions)
Lisez entièrement l'énoncé avant de commencer !
À tout moment, il est autorisé d'admettre les résultats d'une question pour continuer.
Faites usage des brouillons afin de rendre une copie *impeccable*.
Soignez les rédactions qui constituent une part prépondérante de la notation.

I. Intégration

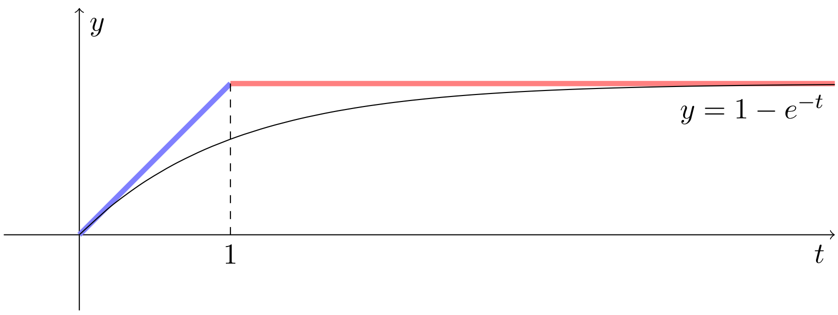
On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que pour tout $t \geqslant 0$, $\frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}} \geqslant 0$ et donner un équivalent simple de $\frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}$ en 0.
2. Que peut-on alors dire de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$?
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
4. Conclure.

On souhaite maintenant obtenir un majorant de I.

5. Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \quad 1-e^{-t} \leqslant t \qquad \text{et} \qquad \forall t \geqslant 1, \quad 1-e^{-t} \leqslant 1$$



6. Utiliser ces deux inégalités pour obtenir une majoration de I.

II. Projection

Les trois parties sont largement indépendantes.

A. Étude d'un endomorphisme

Dans tout l'exercice, k est un réel fixé, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (dimension quelconque).

On définit une application f par

$$f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 + k \cdot x_2. \end{array} \right.$$

7. Montrer que f est linéaire.
8. Que vaut f si $k = 1$?
   Comment appelle-t-on une telle application lorsque $k = 0$?
   lorsque $k = -1$?

Dorénavant, on suppose $k \neq 1$.

9. Prouver que $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. On admettra que $G = \mathrm{Ker}(f - k \cdot \mathrm{id}_E)$.

10. Montrer que $f^2 - (1+k)f + k \cdot \mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

NB : f^2 désigne ici $f \circ f$.

B. Réciproque

Réciproquement, soit g un endomorphisme de E vérifiant $g^2 - (1+k)g + k \cdot \mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On suppose toujours $k \neq 1$ et on souhaite montrer qu'il existe F et G, supplémentaires dans E, tels que

$$g \ : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 + k \cdot x_2. \end{array} \right.$$

11. Quels sont les bons candidats pour F et G ?
12. Montrer que $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(g - k \cdot \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E. On pourra s'aider de la décomposition suivante :

$$x = \frac{g(x) - k \cdot x}{1-k} + \frac{x - g(x)}{1-k}$$

13. Comment trouve-t-on la décomposition de la question précédente ?
14. Conclure.

C. Exemple numérique

Dorénavant, $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où l'on a posé

$$\varepsilon_1 = (1,0,2), \qquad \varepsilon_2 = (1,1,1), \qquad \varepsilon_3 = (1,1,0).$$

15. Justifier que $E = F \oplus G$.

16. Donner, dans la base canonique, la matrice P de la projection sur F parallèlement à G.
    Vérifier que $\mathrm{tr}(P) = \mathrm{rg}(P) = \dim(F)$.

17. Justifier que $Q = I_3 - P$ est la matrice de la projection sur G parallèlement à F.
    Donner alors la matrice de l'application ci-dessous dans la base canonique :

$$f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 + k \cdot x_2. \end{array} \right.$$

Hand with Reflecting Sphere.
M. C. Escher.