Devoir surveillé n°2

Sans calculatrice et sans document.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie séparée.
Lisez entièrement l'énoncé avant de commencer !
À tout moment, il est autorisé d'admettre les résultats d'une question pour continuer.
Faites usage des brouillons afin de rendre une copie *impeccable*.
Soignez les rédactions qui constituent une part prépondérante de la notation.

I. Algèbre

Première partie

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer le noyau de A.
   (b) Donner une valeur propre ε_1 évidente de B et un vecteur propre associé.

(a) On voit immédiatement que les colonnes de A vérifient $C_1 = C_2$: donc $\varepsilon_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Ker} A$.
Cela implique $\operatorname{rg} A \leqslant 2$. Or, les colonnes C_2 et C_3 n'étant pas proportionnelles, on a $\operatorname{rg} A \geqslant 2$.
Ainsi $\dim(\operatorname{Ker} A) = 3 - \operatorname{rg} A = 1$ et on a donc sans calcul $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$.
(b) ε_1 représente alors un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda_1 = 0$.

2. Déterminer deux vecteurs propres (ε_2 et ε_3) distincts de la forme $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec a réel à déterminer.

   Préciser les deux valeurs propres associées.

$\left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est vecteur propre de A pour la valeur λ si $A\left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \lambda\left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Après identification, $\begin{cases} a = \lambda a \\ a + 2 = \lambda \end{cases}$. En remplaçant a par $\lambda - 2$ dans la première équation, on trouve $0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$.
<u>1^{er} cas :</u> $\lambda_2 = 2$, on trouve $a = 0$: posons $\varepsilon_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
<u>2^{e} cas :</u> $\lambda_3 = 1$, on trouve $a = -1$: posons $\varepsilon_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Sans calcul, justifier que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Les trois vecteurs (propres) sont associés à des valeurs propres distinctes. Par théorème, ils forment une famille libre.
Étant composée de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, cette famille est aussi génératrice (donc une base) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. Soit u l'endomorphisme $u : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{cases}$. Donner la matrice de u dans la base canonique, puis la matrice de u dans la base $\beta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Dans la base canonique, u a évidemment pour matrice A.
Dans β, le fait que $u(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ ($i \in \{1,2,3\}$) justifie que la matrice de u est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D vérifiant $AP = PD$.

On note $D = A'$. On a alors $D = P^{-1}AP$ (ou bien $AP = PD$) si P est la matrice de passage de la base canonique vers β (expression des ε_i en colonne, dans la base canonique) : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie

Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Montrer par calcul que B n'admet aucune valeur propre réelle.

Cherchons (λ, a, b) réels tels que $B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $\begin{cases} b = \lambda a \\ -a = \lambda b \end{cases}$ donc $\begin{cases} (1+\lambda^2)a = 0 \\ (1+\lambda^2)b = 0 \end{cases}$.
Comme $1 + \lambda^2 = 0$ n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$ (mais dans $\mathbb{C}$, il y en aurait 2 !), on en déduit que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: il n'y a donc aucun vecteur propre.

Soit E : un espace vectoriel réel de dimension finie d et f : un endomorphisme de E. λ désigne un réel.

7. Démontrer que
$$\mathrm{Ker}(\lambda.\mathrm{id}_E - f) \subset \mathrm{Ker}(\lambda^2.\mathrm{id}_E - f \circ f).$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\lambda.\mathrm{id}_E - f)$, on sait donc que $f(x) = \lambda x$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(\lambda^2.\mathrm{id}_E - f \circ f)$:
$$(\lambda^2.\mathrm{id}_E - f \circ f)(x) = \lambda^2 x - f(f(x)) = \lambda^2 x - f(\lambda x) = \lambda^2 x - \lambda f(x) = \lambda^2 x - \lambda^2 x = 0$$

8. Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de $f \circ f$?

Cela montre que si x est vecteur propre pour f associé à la valeur λ, alors x est vecteur propre de $f^2 = f \circ f$ associé à la valeur λ^2.
Exprimé autrement : si λ est valeur propre de f, alors λ^2 est valeur propre de $f^2 = f \circ f$.

9. Calculer B^2 et retrouver le résultat de la question 6.

$B^2 = -I_2$.
D'après la question précédente, si λ était valeur propre de B, on aurait λ^2 valeur propre de $B^2 = -I_2 \ldots$ donc $\lambda^2 = -1$ ce qui est absurde dans $\mathbb{R}$ (mais pas dans $\mathbb{C} \ldots$ ☺).

II. Séries

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad , \quad U_n = 2\sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad V_n = S_n - 2\sqrt{n}$$

Partie A

L'objectif de cette partie est de montrer que $S_n = 2\sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n})$.

1. Pour tout $k \geqslant 2$, montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$. Est-ce vrai pour $k = 1$?
2. Soit $n \geqslant 1$ et k un entier compris entre 1 et n. À l'aide de la question précédente, donner un encadrement de S_n par deux intégrales.
3. Terminer le calcul des précédentes intégrales et en déduire un équivalent de S_n.
4. Conclure.

Partie B

L'objectif de cette partie est de montrer qu'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $S_n = 2\sqrt{n} + \ell + \mathrm{o}(1)$.

5. Écrire le développement limité au voisinage de 0 de $t \mapsto \sqrt{1+t}$ à l'ordre 2. Déterminer un réel a vérifiant :
$$U_n = \frac{a}{n^{\frac{3}{2}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$
6. En déduire que la série $\sum_{n>0} U_n$ converge.
On notera $\ell = -\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ (on ne cherchera pas à calculer ℓ).
7. Développer U_n puis expliciter $\sum_{k=1}^{n} U_k$ en fonction de V_n.
8. Conclure.

Partie C

L'objectif de cette partie est de montrer que $S_n = 2\sqrt{n} + \ell + \frac{2}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
On pose pour cela $W_n = 2\sqrt{n} - S_n + \ell$.

9. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2}(W_n - W_{n-1})$ converge et que $W_n - W_{n-1} = U_n \sim \frac{a}{n^{\frac{3}{2}}}$.
10. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$:
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$$
puis donner un encadrement de $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ par deux intégrales ($N > n$).
11. Montrer que $\frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$. En déduire un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.
12. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(W_k - W_{k-1}) = -W_n$.

On admet le résultat suivant :
Soit $\sum_{n>0} x_n$ *et* $\sum_{n>0} y_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$.
On suppose que $\sum_{n>0} x_n$ *converge (donc également* $\sum_{n>0} y_n$*).*
Alors $\sum_{k=n}^{+\infty} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} y_k$.

13. En déduire un équivalent de W_n.
14. Conclure.

III. Intégration

On pose $I = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x^4-1)}{x^3}\,\mathrm{d}x$, $J = \int_2^{+\infty} \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ et $K = \int_4^{+\infty} \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^4-1)}{x} = 0$.
   (b) En déduire la convergence de I.

La limite vient du fait que, pour $x \geqslant 2$, $\quad 0 < \ln(x^4-1) < \ln(x^4) = 4\ln(x)$
et du théorème de croissances comparées.
On en déduit qu'à partir d'un certain réel A, la fonction positive $\frac{\ln(x^4-1)}{x^3}$ est inférieure à $\frac{1}{x^2}$ dont l'intégrale sur $[A,+\infty[$ converge. Par comparaison puis par indifférence de la borne basse, I converge

2. Donner une relation entre I et J.

L'intégration par parties suivante est justifiée par le fait que $\left[\frac{\ln(x^4-1)}{x^2}\right]_2^X$ converge quand $X \to +\infty$ (vers $-\frac{1}{4}\ln(15)$) :

$$u = \ln(x^4-1), \qquad u' = \frac{4x^3}{x^4-1}, \qquad v' = x^{-3}, \qquad v = -\frac{1}{2}x^{-2}.$$

Il vient alors

$$I = -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x^4-1)}{x^2}\right]_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^4-1} = \frac{\ln 15}{8} + 2J.$$

3. À l'aide d'un changement de variables que vous justifierez, donner une relation entre J et K.

On pose $t = x^2$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective croissante de $[4,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.
On a $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ donc

$$2J = \int_2^{+\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^4-1} = \int_4^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = K$$

4. Calculer K et en déduire la valeur de I.

$$K = \int_4^{+\infty} \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\right]_4^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}.$$

Ainsi

$$I = \frac{\ln(5\times 3)}{8} + \frac{\ln(\frac{5}{3})}{2} = \frac{5\ln 5 - 3\ln 3}{8}.$$

IV. Probabilités

Tous les matins, Monsieur Thompson regarde ses carottes pousser en sirotant son café dans son rocking-chair et joue au jeu suivant : chaque fois qu'il aperçoit un lapin dans son jardin, il lui jette rageusement sa tasse, retourne ensuite la chercher et se rassoit :

- à chaque lancer, la probabilité que la tasse touche le lapin est de $1/2$. Chacune des issues (succès ou échec) est indépendante des précédentes.
- après chaque lancer, la tasse devient de plus en plus fragile : lorsque Monsieur Thompson la lance pour la k-ième fois, elle à une probabilité de $\frac{1}{k}$ de rester intacte et une probabilité de $\frac{k-1}{k}$ de se briser (elle ne se casse donc jamais au premier lancer).

Lorsque la tasse est brisée, Monsieur Thompson arrête de jouer et rentre chez lui. On note les évènements suivants :

- I_k : la tasse ne se casse pas lorsqu'elle est lancée la k-ième fois (autrement dit : la tasse reste intacte au k-ième lancer).
- B_k : la tasse se brise exactement au k-ième lancer.
- B : la tasse ne se brise jamais.
- L_k : exactement k lapins ont été touchés à la fin de la partie.

1. *Il s'agit de montrer dans cette question que la probabilité de B est nulle.*
   (a) La suite d'évènements $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ?

   Si la tasse est encore intacte au $(n+1)$-ième lancer alors elle l'était au n-ième. Donc $I_{n+1} \subset I_n$ et la suite (I_n) est décroissante.

   (b) Exprimer l'évènement B à l'aide des évènements de la famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

   (c) Pour tout $n \geqslant 2$, préciser la valeur de $P_{I_{n-1}}(I_n)$ et en déduire celle de $P(I_n)$.

   $P_{I_{n-1}}(I_n) = \frac{1}{n}$ d'où (par récurrence) $P(I_n) = \frac{1}{n!}$.
   NB : cela nécessite une rédaction précise :
   exemple $P(I_3) = P_{(I_2\cap I_1)}(I_3) \times P_{I_1}(I_2) \times P(I_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1$.

   (d) Conclure.

   Par théorème de la limite décroissante, $P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(I_n) = 0$.

2. (a) En remarquant que la famille $(B, B_1, B_2, B_3, \dots)$ forme une partition de Ω, donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)$.

   Ces évènements sont bien 2 à 2 incompatibles et leur réunion couvre toutes les éventualités. On a donc $1 = P(B) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)$.

   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(B_n) = \frac{n-1}{n!}$ et vérifier, par le calcul, la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$ trouvée à la question précédente.

   On a $B_n = B_n \cap I_{n-1}$ (si la tasse casse au n-ième lancer, elle est restée intacte jusqu'au $(n-1)$-ième) d'où $P(B_n) = P(I_{n-1})P_{I_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$.
   Dès lors, la série $\sum_{n\geqslant 1} P(B_n)$ est télescopique et vaut 1 après calculs.

3. Montrer que, sachant que la tasse se brise au n-ième lancer, le nombre de lapins touchés suit une soit binomiale dont les paramètres sont à préciser.

   Il y a exactement n lancers, indépendants par hypothèse, dont chacun a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'atteindre son but. Il s'agit donc d'une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.

4. Calculer $p = P(L_1)$.

Notons $a = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
P(L_1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{B_n}(L_1)P(B_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n.a^n \frac{n-1}{n!} \\
&= a^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^{(n-2)}}{(n-2)!} \\
&= a^2 \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{a^{n'}}{n'!} \qquad \text{où } n' = n-2 \\
&= a^2 \mathrm{e}^a = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Monsieur Thompson à touché exactement un lapin. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué n lancers ? On exprimera le résultat en fonction de p.

$$P_{L_1}(B_n) = \frac{P(L_1 \cap B_n)}{P(L_1)} = P_{B_n}(L_1)\frac{P(B_n)}{P(L_1)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{n-1}{n!} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{n-1}{p2^n(n-1)!}$$

6. Calculer la probabilité que Monsieur Thompson ne touche aucun lapin. Puis la probabilité notée q qu'il touche au moins un lapin.

$$\begin{aligned}
P(L_0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{B_n}(L_0)P(B_n) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} a^n \frac{n-1}{n!} \\
&= a\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \\
&= a(\mathrm{e}^a - 1) - (\mathrm{e}^a - 1 - a) \\
&= 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

La probabilité cherchée est $q = P(\overline{L_0}) = 1 - P(L_0) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Monsieur Thompson a touché au moins 1 lapin, quelle est la probabilité qu'il ait fait n lancers ? On exprimera le résultat en fonction de q.

$$P_{\overline{L}_0}(B_n) = \frac{P(B_n)}{P(\overline{L_0})} P_{B_n}(\overline{L_0}) \;=\; \frac{P(B_n)}{P(\overline{L_0})}\Big(1 - P_{B_n}(L_0)\Big) \;=\; \frac{n-1}{q \cdot n!}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$