Devoir surveillé n°2

Sans calculatrice et sans document.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie séparée.
Lisez entièrement l'énoncé avant de commencer !
À tout moment, il est autorisé d'admettre les résultats d'une question pour continuer.
Faites usage des brouillons afin de rendre une copie *impeccable*.
Soignez les rédactions qui constituent une part prépondérante de la notation.

I. Algèbre

Première partie

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer le noyau de A.
   (b) Donner une valeur propre ε_1 évidente de B et un vecteur propre associé.
2. Déterminer deux vecteurs propres (ε_2 et ε_3) distincts de la forme $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec a réel à déterminer.
   Préciser les deux valeurs propres associées.
3. Sans calcul, justifier que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Soit u l'endomorphisme $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$. Donner la matrice de u dans la base canonique, puis la matrice de u dans la base $\beta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
5. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D vérifiant $AP = PD$.

Deuxième partie

Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Montrer par calcul que B n'admet aucune valeur propre réelle.

Soit E : un espace vectoriel réel de dimension finie d et f : un endomorphisme de E. λ désigne un réel.

7. Démontrer que
$$\operatorname{Ker}(\lambda.\mathrm{id}_E - f) \subset \operatorname{Ker}(\lambda^2.\mathrm{id}_E - f \circ f).$$
8. Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de $f \circ f$?
9. Calculer B^2 et retrouver le résultat de la question 6.

II. Séries

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad , \quad U_n = 2\sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad V_n = S_n - 2\sqrt{n}$$

Partie A

L'objectif de cette partie est de montrer que $S_n = 2\sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n})$.

1. Pour tout $k \geqslant 2$, montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$. Est-ce vrai pour $k = 1$?
2. Soit $n \geqslant 1$ et k un entier compris entre 1 et n. À l'aide de la question précédente, donner un encadrement de S_n par deux intégrales.
3. Terminer le calcul des précédentes intégrales et en déduire un équivalent de S_n.
4. Conclure.

Partie B

L'objectif de cette partie est de montrer qu'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $S_n = 2\sqrt{n} + \ell + \mathrm{o}(1)$.

5. Écrire le développement limité au voisinage de 0 de $t \mapsto \sqrt{1+t}$ à l'ordre 2. Déterminer un réel a vérifiant :
$$U_n = \frac{a}{n^{\frac{3}{2}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$
6. En déduire que la série $\sum_{n>0} U_n$ converge.
   On notera $\ell = -\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ (on ne cherchera pas à calculer ℓ).
7. Développer U_n puis expliciter $\sum_{k=1}^{n} U_k$ en fonction de V_n.
8. Conclure.

Partie C

L'objectif de cette partie est de montrer que $S_n = 2\sqrt{n} + \ell + \frac{2}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

On pose pour cela $W_n = 2\sqrt{n} - S_n + \ell$.

9. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 2}(W_n - W_{n-1})$ converge et que $W_n - W_{n-1} = U_n \sim \frac{a}{n^{\frac{3}{2}}}$.
10. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$:
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$$
    puis donner un encadrement de $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ par deux intégrales ($N > n$).
11. Montrer que $\frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$. En déduire un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.
12. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(W_k - W_{k-1}) = -W_n$.

On admet le résultat suivant :
Soit $\sum_{n>0} x_n$ *et* $\sum_{n>0} y_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$.
On suppose que $\sum_{n>0} x_n$ *converge (donc également* $\sum_{n>0} y_n$*).*
Alors $\sum_{k=n}^{+\infty} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} y_k$.

13. En déduire un équivalent de W_n.
14. Conclure.

III. Intégration

On pose $I = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x^4-1)}{x^3}\,\mathrm{d}x$, $J = \int_2^{+\infty} \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ et $K = \int_4^{+\infty} \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^4-1)}{x} = 0$.
   (b) En déduire la convergence de I.
2. Donner une relation entre I et J.
3. À l'aide d'un changement de variables que vous justifierez, donner une relation entre J et K.
4. Calculer K et en déduire la valeur de I.

IV. Probabilités

Tous les matins, Monsieur Thompson regarde ses carottes pousser en sirotant son café dans son rocking-chair et joue au jeu suivant : chaque fois qu'il aperçoit un lapin dans son jardin, il lui jette rageusement sa tasse, retourne ensuite la chercher et se rassoit :

- à chaque lancer, la probabilité que la tasse touche le lapin est de $1/2$. Chacune des issues (succès ou échec) est indépendante des précédentes.
- après chaque lancer, la tasse devient de plus en plus fragile : lorsque Monsieur Thompson la lance pour la k-ième fois, elle à une probabilité de $\frac{1}{k}$ de rester intacte et une probabilité de $\frac{k-1}{k}$ de se briser (elle ne se casse donc jamais au premier lancer).

Lorsque la tasse est brisée, Monsieur Thompson arrête de jouer et rentre chez lui. On note les évènements suivants :

- I_k : la tasse ne se casse pas lorsqu'elle est lancée la k-ième fois (autrement dit : la tasse reste intacte au k-ième lancer).
- B_k : la tasse se brise exactement au k-ième lancer.
- B : la tasse ne se brise jamais.
- L_k : exactement k lapins ont été touchés à la fin de la partie.

1. *Il s'agit de montrer dans cette question que la probabilité de B est nulle.*
   (a) La suite d'évènements $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ?
   (b) Exprimer l'évènement B à l'aide des évènements de la famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Pour tout $n \geqslant 2$, préciser la valeur de $P_{I_{n-1}}(I_n)$ et en déduire celle de $P(I_n)$.
   (d) Conclure.

2. (a) En remarquant que la famille $(B, B_1, B_2, B_3, \dots)$ forme une partition de Ω, donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)$.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(B_n) = \frac{n-1}{n!}$ et vérifier, par le calcul, la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$ trouvée à la question précédente.

3. Montrer que, sachant que la tasse se brise au n-ième lancer, le nombre de lapins touchés suit une soit binomiale dont les paramètres sont à préciser.
4. Calculer $p = P(L_1)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Monsieur Thompson à touché exactement un lapin. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué n lancers ? On exprimera le résultat en fonction de p.
6. Calculer la probabilité que Monsieur Thompson ne touche aucun lapin. Puis la probabilité notée q qu'il touche au moins un lapin.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Monsieur Thompson a touché au moins 1 lapin, quelle est la probabilité qu'il ait fait n lancers ? On exprimera le résultat en fonction de q.