Devoir surveillé n°3

Sans calculatrice et sans document.
Ce devoir de 2h contient 3 exercices. Lisez entièrement l'énoncé avant de commencer !
À tout moment, il est autorisé d'admettre les résultats d'une question pour continuer.
Faites usage des brouillons afin de rendre une copie *impeccable*.
Soignez les rédactions qui constituent une part prépondérante de la notation.

I. Système

On étudie le système suivant (k est un réel fixé) :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rrrcr} (k^2-k)x & +2ky & +(k^2+k)z & = & -1 \\ x & +2\,y & +k\,z & = & +1 \\ -2x & +2\,y & +(k+1)z & = & -k \end{array}\right.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de k ce système possède-t-il une et une seule solution ?
2. Dans les autres k, déterminer l'ensemble des solutions.
   (On décrira alors géométriquement l'ensemble des solutions.)

Le déterminant du système est

$$D = \begin{vmatrix} k(k-1) & 2k & k(k+1) \\ 1 & 2 & k \\ -2 & 2 & k+1 \end{vmatrix} = 2k \begin{vmatrix} k-1 & 1 & k+1 \\ 1 & 1 & k \\ -2 & 1 & k+1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=}} 2k \begin{vmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & k+1 \end{vmatrix} = 2k(k+1).$$

... où l'on a commencé en factorisant L_1 par k et C_2 par 2.
Il y a donc trois cas à étudier pour trouver l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$:

- lorsque $k \notin \{0, -1\}$, $D \neq 0$ et le système possède une unique solution. Elle n'est pas demandée, mais les formules de Cramer pourraient être envisagées ;
- lorsque $k = 0$: la première équation du système initial donne $0 = -1$... Ce système est alors incompatible : $\mathscr{S} = \varnothing$;
- lorsque $k = -1$, le système devient

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & -2y & & = & -1 \\ x & +2y & -z & = & 1 \\ -2x & +2y & & = & 1 \quad (L_3 = -L_1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} (x & = & 0 + x) \\ y & = & \frac{1}{2} + x \\ z & = & 0 + 3x \end{array}\right.$$

Les solutions (x, y, z) sont donc *tous* les vecteurs de la forme $(0, \frac{1}{2}, 0) + x(1, 1, 3)$.
$\mathscr{S}$ est donc une droite passant par $(0, \frac{1}{2}, 0)$, dirigée par le vecteur $(1, 1, 3)$.

II. Déterminants

Dans cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ainsi que l'application

$$\varphi : \left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tAMA \end{array}\right.$$

On note $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix}a^2 & ab & ab & b^2\\ac & ad & bc & bd\\ac & bc & ad & bd\\c^2 & cd & cd & d^2\end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\2ac & ad+bc & 2bd\\c^2 & cd & d^2\end{vmatrix}$

1. En remarquant que $\begin{pmatrix}a^2 & ab & b^2\\2ac & ad+bc & 2bd\\c^2 & cd & d^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 0 & b^2\\c & a & 2bd\\0 & c & d^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & 0\\c & d & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ montrer que $\Delta_2 = (ad-bc)^3$

   Le déterminant d'un produit est égal au produit des déterminants donc :

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix}a & 0 & b^2\\c & a & 2bd\\0 & c & d^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a & b & 0\\c & d & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix} && (1)\\
&= (a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd)(ad-bc) && (2)\\
&= (ad(ad-bc) + bc(bc-ad))(ad-bc) && (3)\\
&= (ad-bc)^3 && (4)
\end{aligned}$$

2. Donner une relation entre Δ_1 et Δ_2. En déduire la valeur de Δ_1.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}a^2 & ab & ab & b^2\\ac & ad & bc & bd\\ac & bc & ad & bd\\c^2 & cd & cd & d^2\end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix}a^2 & 0 & ab & b^2\\ac & ad-bc & bc & bd\\ac & bc-ad & ad & bd\\c^2 & 0 & cd & d^2\end{vmatrix} = (ad-bc)\begin{vmatrix}a^2 & 0 & ab & b^2\\ac & 1 & bc & bd\\ac & -1 & ad & bd\\c^2 & 0 & cd & d^2\end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_3 + L_3}{=}$$
$$(ad-bc)\begin{vmatrix}a^2 & 0 & ab & b^2\\ac & 1 & bc & bd\\2ac & 0 & ad+bc & 2bd\\c^2 & 0 & cd & d^2\end{vmatrix} = (ad-bc)\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\2ac & ad+bc & 2bd\\c^2 & cd & d^2\end{vmatrix} \text{(En dvpt par rapport à } C_2)$$

3. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

   $\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a^2 & ac\\ac & c^2\end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a^2 & ac\\ac & c^2\end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a^2 & ac\\ac & c^2\end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a^2 & ac\\ac & c^2\end{pmatrix}$.

   La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est donc $M = \begin{pmatrix}a^2 & ab & ab & b^2\\ac & ad & bc & bd\\ac & bc & ad & bd\\c^2 & cd & cd & d^2\end{pmatrix}$

4. Montrer que φ est bijective si et seulement si $\text{dét}\, A \neq 0$.

   $\text{dét}\,\varphi = \text{dét}\, M = \Delta_1$ et d'après les questions 1 et 2, $\Delta_1 = (ad-bc)^4$.
   Finalement

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ bijective} &\iff \text{dét}\,\varphi \neq 0\\
&\iff (ad-bc)^4 \neq 0\\
&\iff ad-bc \neq 0\\
&\iff \text{dét}\, A \neq 0
\end{aligned}$$

III. Séries entières : une équation différentielle

1. (*Cours*) Rappeler le développement en série entière de e^x. Par la méthode de votre choix, retrouver le développement de sh. Donner les rayons de convergence à chaque fois.

2. On cherche une fonction de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ qui vérifie

$$x\,y''(x) + 2y'(x) - x\,y(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad y(0) = 1$$

   (a) Donner a_0.
   (b) Calculer a_1 et établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre a_{n+1} et a_{n-1}.
   (c) Que vaut a_{2n+1} $(n \in \mathbb{N})$?
   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!}$.

3. Donner ensuite son rayon de convergence.
4. Exprimer cette fonction grâce à des fonctions usuelles.

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
xy &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\
y' &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\
y'' &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} \\
xy'' &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= xy'' + 2y' - xy \\
&= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ (n^2 + 3n + 2) a_{n+1} - a_{n-1} \right\} x^n \\
&= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ (n+2)(n+1) a_{n+1} - a_{n-1} \right\} x^n
\end{aligned}$$

Identification (on a $a_0 = 1$ d'après les conditions initiales) :

$$\begin{aligned}
& a_1 = 0 \\
\forall n \geqslant 1, \qquad & a_{n+1} \overset{*}{=} \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Par une récurrence aisée, on trouve que les termes de rangs impairs : a_{2n+1}, sont tous nuls.
La formule « $a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!}$ » est vraie au rang $n = 0$ ($\frac{1}{1!} = 1 = a_0$), vérifions l'hérédité :
Si, pour $n \geqslant 1$, $a_{2(n-1)} \overset{**}{=} \frac{1}{(2n-1)!}$, on a d'après l'égalité $*$:

$$a_{2n} \overset{*}{=} \frac{a_{2n-2}}{2n(2n+1)} \overset{**}{=} \frac{1}{\left[(2n-1)!\right] 2n(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1)!}.$$

d'où la conclusion.
On reconnaît, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$. Après calcul, le rayon de convergence vaut $+\infty$.