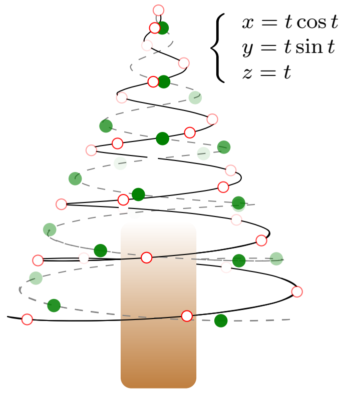


Devoir surveillé n°4

Sans calculatrice et sans document.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie séparée.
Soignez la rédaction qui constitue la part prépondérante de la notation.

I. Équation de Laguerre

On considère l'équation différentielle

$$xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0, \qquad y(0) = 1, \tag{E}$$

où λ est un réel fixé.

A. Première partie

On cherche des solutions sous forme d'une série entière : on suppose qu'il existe des nombres réels a_n tels que

— $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ ait un rayon de convergence R strictement positif

— et $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E) sur $]-R, R[$.

1. Donner a_0 et établir une relation entre a_n et a_{n+1}.
2. Donner la solution y lorsque $\lambda = -2$. Rayon de convergence ?
3. Donner y lorsque $\lambda = 1$. Reconnaître cette fonction et donner son rayon de convergence.

B. Seconde partie

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et F le sous-espace constitué des fonctions polynomiales de degré $\leqslant 3$.

On définit enfin l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & xy'' + (1-x)y'. \end{array}$$

(On ne demande pas de prouver la linéarité de φ.)

4. Montrer que φ est bien un endomorphisme de E.
   Montrer que F est stable par φ.

On note ψ la restriction de φ à F.

5. Donner la matrice de ψ dans la base canonique de F.
   ψ est-il diagonalisable ?
6. Donner son polynôme caractéristique et ses éléments propres.
7. Quel lien y a-t-il entre les vecteurs propres de φ et les solutions de (E) ?
   Vérifier en particulier que la solution de la question 2 est présente à la question 6.

II. Problème des puces

On considère 2 chiens (Milou et Dagobert) et N puces. A l'instant initial, toutes les puces se trouvent sur Milou. Chaque minute, une puce, choisie au hasard de façon équiprobable, saute et change de chien. On note $D_{n,k}$ l'événement : "Au bout de n minutes, k puces se trouvent sur Dagobert".

Ainsi $P(D_{0,0}) = 1$ et $P(D_{1,1}) = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} P(D_{n,0}) \\ P(D_{n,1}) \\ \vdots \\ P(D_{n,N}) \end{pmatrix}$. Ainsi $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour $N = 2$, déterminer une matrice carrée A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A.X_n$.

   — Supposons que Dagobert ait 0 puce à l'instant n, il est alors tout-à-fait certain qu'il en aura 1 à l'instant $n+1$. Et donc : $\begin{cases} P_{D_{n,0}}(D_{n+1,0}) = P_{D_{n,0}}(D_{n+1,2}) = 0 \\ P_{D_{n,0}}(D_{n+1,1}) = 1 \end{cases}$.

   — Supposons maintenant que Dagobert ait 1 puce à l'instant n, il y a alors 2 possibilités : soit cette puce va sur Milou (1 chance sur 2), soit la puce qui est sur Milou va sur Dagobert (1 chance sur 2 également). Finalement : $\begin{cases} P_{D_{n,1}}(D_{n+1,0}) = P_{D_{n,1}}(D_{n+1,2}) = 1/2 \\ P_{D_{n,1}}(D_{n+1,1}) = 0 \end{cases}$.

   — Supposons enfin que Dagobert ait 2 puces à l'instant n, il est alors certain que l'une de ces puces ira sur Milou. Donc : $\begin{cases} P_{D_{n,2}}(D_{n+1,0}) = P_{D_{n,2}}(D_{n+1,2}) = 0 \\ P_{D_{n,2}}(D_{n+1,1}) = 1 \end{cases}$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $$\begin{cases} P(D_{n+1,0}) = P_{D_{n,0}}(D_{n+1,0})P(D_{n,0}) + P_{D_{n,1}}(D_{n+1,0})P(D_{n,1}) + P_{D_{n,2}}(D_{n+1,0})P(D_{n,2}) \\ P(D_{n+1,1}) = P_{D_{n,0}}(D_{n+1,1})P(D_{n,0}) + P_{D_{n,1}}(D_{n+1,1})P(D_{n,1}) + P_{D_{n,2}}(D_{n+1,1})P(D_{n,2}) \\ P(D_{n+1,2}) = P_{D_{n,0}}(D_{n+1,2})P(D_{n,0}) + P_{D_{n,1}}(D_{n+1,2})P(D_{n,1}) + P_{D_{n,2}}(D_{n+1,2})P(D_{n,2}) \end{cases}$$

   On remplace dans ce système les valeurs trouvées précédemment :

   $$\begin{cases} P(D_{n+1,0}) = \frac{1}{2}P(D_{n,1}) \\ P(D_{n+1,1}) = P(D_{n,0}) + P(D_{n,2}) \\ P(D_{n+1,2}) = \frac{1}{2}P(D_{n,1}) \end{cases}$$

   Et donc $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que les valeurs propres de A sont -1 ,0 et 1 et déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 1.

   Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A : $\chi_A(X) = \text{dét}(XI - A) = \begin{vmatrix} X & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -X & -\frac{1}{2} & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X(X+1)(X-1)$.

   Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, c'est à dire : -1, 0 et 1.

3. Cette matrice A est-elle diagonalisable ?

   Une matrice d'ordre n qui admet n valeurs propres distinctes est diagonalisable. C'est le cas ici.

Dans la suite du problème, $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé et on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{N} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{N-1}{N} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{N} & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}$ et ${}^tA$ sa transposée.

4. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

   — Supposons que Dagobert ait 0 puce à l'instant n, il est alors tout-à-fait certain qu'il en aura 1 à l'instant $n+1$. Et donc : $\begin{cases} P_{D_{n,0}}(D_{n+1,0}) = P_{D_{n,0}}(D_{n+1,2}) = \dots = P_{D_{n,0}}(D_{n+1,N}) = 0 \\ P_{D_{n,0}}(D_{n+1,1}) = 1 \end{cases}$.

   — Supposons maintenant que Dagobert ait k puces à l'instant n ($k \neq 0, N$), il y a alors 2 possibilités : soit l'une de ces k puces va sur Milou (k chance sur N), soit l'une des puces qui se trouve sur Milou va sur Dagobert ($N-k$ chance sur N). Finalement : $\begin{cases} P_{D_{n,k}}(D_{n+1,k-1}) = k/N \\ P_{D_{n,k}}(D_{n+1,k+1}) = (N-k)/N \\ P_{D_{n,k}}(D_{n+1,i}) = 0 \text{ pour } i \neq k-1 \text{ et } i \neq k+1 \end{cases}$.

   — Supposons enfin que Dagobert ait N puces à l'instant n, il est alors certain que l'une de ces puces ira sur Milou. Donc : $\begin{cases} P_{D_{n,N}}(D_{n+1,N-1}) = 1 \\ P_{D_{n,N}}(D_{n+1,i}) = 0 \text{ pour } i \neq N-1 \end{cases}$.

   D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{cases} P(D_{n+1,0}) = P_{D_{n,0}}(D_{n+1,0})P(D_{n,0}) + P_{D_{n,1}}(D_{n+1,0})P(D_{n,1}) + \dots + P_{D_{n,N}}(D_{n+1,0})P(D_{n,N}) \\ P(D_{n+1,1}) = P_{D_{n,0}}(D_{n+1,1})P(D_{n,0}) + P_{D_{n,1}}(D_{n+1,1})P(D_{n,1}) + \dots + P_{D_{n,N}}(D_{n+1,1})P(D_{n,N}) \\ P(D_{n+1,2}) = P_{D_{n,0}}(D_{n+1,2})P(D_{n,0}) + P_{D_{n,1}}(D_{n+1,2})P(D_{n,1}) + \dots + P_{D_{n,N}}(D_{n+1,2})P(D_{n,N}) \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ P(D_{n+1,N}) = P_{D_{n,0}}(D_{n+1,N})P(D_{n,0}) + P_{D_{n,1}}(D_{n+1,N})P(D_{n,1}) + \dots + P_{D_{n,N}}(D_{n+1,N})P(D_{n,N}) \end{cases}$$

   En y remplaçant les valeurs des probabilités conditionnelles trouvées précédemment, il vient :

$$\begin{pmatrix} P(D_{n+1,0}) \\ P(D_{n+1,1}) \\ P(D_{n+1,2}) \\ P(D_{n+1,3}) \\ \vdots \\ P(D_{n+1,N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{N} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{N-1}{N} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{N} & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(D_{n,0}) \\ P(D_{n,1}) \\ P(D_{n,2}) \\ P(D_{n,3}) \\ \vdots \\ P(D_{n,N}) \end{pmatrix}$$

5. En remarquant que la somme des coefficients de chaque colonne de A vaut toujours 1, montrer que 1 est valeur propre de ${}^tA$.

   $\begin{pmatrix} 11\dots1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 11\dots1 \end{pmatrix}$ et donc ${}^tA^t\begin{pmatrix} 11\dots1 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} 11\dots1 \end{pmatrix}$. Le vecteur ${}^t\begin{pmatrix} 11\dots1 \end{pmatrix}$ est donc vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.

6. En déduire que ${}^t(A - I_{N+1})$ est non inversible.

   ${}^t(A - I_{N+1}) = {}^tA - {}^tI_{N+1} = {}^tA - I_{N+1}$. Or, 1 est valeur propre de ${}^tA$ et donc ${}^tA - I_{N+1}$ n'est pas inversible.

7. En déduire enfin que 1 est valeur propre de A.

Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée d'où dét ${}^t(A - I_{N+1}) = \text{dét}(A - I_{N+1})$. Comme ${}^t(A - I_{N+1})$ est non inversible dét ${}^t(A - I_{N+1}) = 0$ et finalement $\text{dét}(A - I_{N+1}) = 0$. On en déduit que 1 est bien valeur propre de A.

On note maintenant E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et on pose $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de E_1.

8. Dans cette question, on va montrer que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $\alpha_k = \binom{N}{k} \alpha_0$.

   (a) Commencer par montrer que cette relation est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$.

   On regarde la première ligne de l'équation matricielle $\varepsilon_1 = A\varepsilon_1$. On a alors $\alpha_0 = \frac{1}{N}\alpha_1$ et donc $\alpha_1 = \binom{N}{1} \alpha_0$.

   (b) En supposant la relation vraie au rang $N - 1$, montrer qu'elle est vraie au rang N.

   On regarde maintenant la dernière ligne de l'équation matricielle : $\alpha_N = \frac{1}{N}\alpha_{N-1}$. Or, on a supposé que $\alpha_{N-1} = \binom{N}{N-1} \alpha_0$. Finalement $\alpha_N = \alpha_0 = \binom{N}{N} \alpha_0$.

   (c) Montrer maintenant que pour tout $0 \leqslant k \leqslant N - 2$, $(k + 2)\alpha_{k+2} = N\alpha_{k+1} - (N - k)\alpha_k$.

   On regarde la ligne $k + 2$ $(0 \leqslant k \leqslant N - 2)$ de l'équation matricielle $\varepsilon_1 = A\varepsilon_1$:

$$\alpha_{k+1} = \frac{N-k}{N}\alpha_k + \frac{k+2}{N}\alpha_{k+2}$$

   D'où le résultat.

   (d) En déduire, par récurrence, le résultat cherché.

   Supposons que pour $0 < k < N - 1$, $\alpha_k = \binom{N}{k} \alpha_0$ et montrons que $\alpha_{k+1} = \binom{N}{k+1} \alpha_0$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= \frac{1}{k+1}\left(N\alpha_k - (N - (k-1))\alpha_{k-1}\right) \\
&= \left[N\binom{N}{k} - (N - k + 1)\binom{N}{k-1}\right]\frac{\alpha_0}{k+1} \\
&= \left[\frac{N.N!}{k!(N-k)!} - \frac{(N-k+1)N!}{(k-1)!(N-k+1)!}\right]\frac{\alpha_0}{k+1} \\
&= \left[\frac{N.N!}{k!(N-k)!} - \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!}\right]\frac{\alpha_0}{k+1} \\
&= \left[\frac{N.N! - k.N!}{k!(N-k)!}\right]\frac{\alpha_0}{k+1} \\
&= \frac{N!(N-k)}{k!(N-k)!(k+1)}\alpha_0 \\
&= \frac{N!}{(N-(k+1))!(k+1)!}\alpha_0 \\
&= \binom{N}{k+1}\alpha_0
\end{aligned}$$

   Conclusion : la proposition est vraie pour $k = 0$, $k = 1$ (question a). De plus, si on suppose la proposition vraie au rang $1 < k < N$ alors elle est vraie au rang $k + 1$ (questions b et c). On a bien montré par récurrence que la proposition est vraie pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

9. Quelle est alors la dimension de E_1 ?

On vient de montrer que tous les vecteurs de E_1 sont proportionnels. Donc $\dim E_1 = 1$.

10. Calculer $S = \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix}$

$S = \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^N = 2^N$

11. En déduire un vecteur de probabilités invariant : c'est à dire un vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix}$ tel que $A\pi = \pi$, $\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1$ et $\forall i \in [\![0, N]\!]$, $\pi_i \geqslant 0$.

Il suffit de poser $\pi_k = \frac{1}{2^N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix}$.

Devoir surveillé n°4

Courbes (30min.)

Nom:

Réduction d'un intervalle d'étude

Compléter le texte à trous suivant :

On considère la courbe paramétrée $f(t) = \begin{cases} \sin(2t) \\ \cos(t) \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $t \to \sin(2t)$ est de période $\boxed{\quad\quad}$, et la fonction $t \to \cos(t)$ est de période $\boxed{\quad\quad}$.
La courbe paramétrée f est donc de période $T = \boxed{\quad\quad}$. On peut donc réduire l'intervalle d'étude de la courbe à un intervalle de largeur T sans en changer le support. Pour la suite, on choisit l'intervalle d'étude suivant : $\boxed{\quad\quad}$.
On remarque que les points $M(t)$ et $M(t+\pi)$ sont symétriques par rapport à $\boxed{\quad\quad}$. De plus, lorsque t varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, $t+\pi$ décrit l'intervalle $\boxed{\quad\quad}$. Il suffit donc

....

....

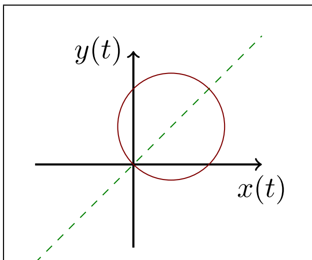
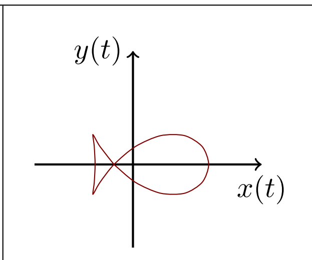
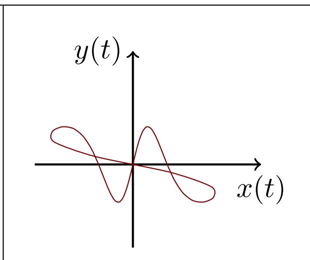
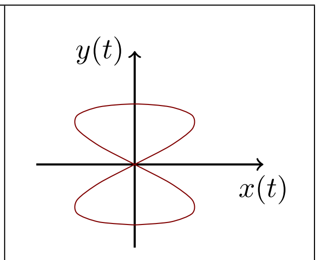
....

Symétries

On vous propose quatre courbes paramétrées :

Γ_1 :	Γ_2 :	Γ_3 :	Γ_4 :
$\begin{cases} x(t) = \cos t + 3\cos\frac{t}{2} \\ y(t) = \sin t \end{cases}$	$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x(t) = \frac{\cos t}{1.1+\sin t} \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$	$\begin{cases} x(t) = \frac{1+t}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t(1+t)}{1+t^2} \end{cases}$

Voici maintenant dans le désordre, les supports des courbes. En vous aidant des symétries, indiquer sous chaque graphe le nom de la courbe correspondante.

Points stationnaires ou réguliers

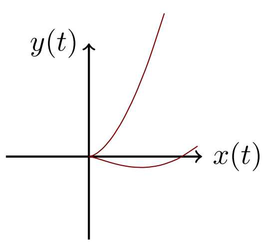
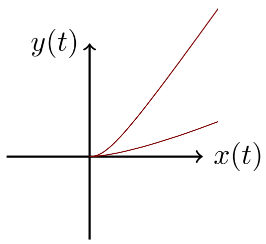
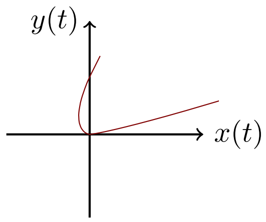
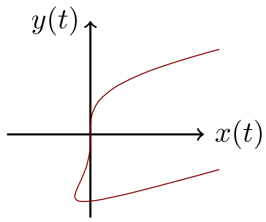
Voici des courbes paramétrées :

$\mathscr{C}_1$:	$\mathscr{C}_2$:	$\mathscr{C}_3$:	$\mathscr{C}_4$:
$\begin{cases} x(t) = t^2+t^3+t^4 \\ y(t) = t^4 \end{cases}$	$\begin{cases} x(t) = t^3+t^4 \\ y(t) = t^4 \end{cases}$	$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3+t^4 \end{cases}$	$\begin{cases} x(t) = t^3+t^4 \\ y(t) = t+t^4 \end{cases}$

L'une d'entre elles n'a pas de point stationnaire en $t = 0$. Laquelle ? ____________________.

Voici maintenant, dans le désordre, la représentation graphique du support de ces courbes au voisinage de $t = 0$.

Indiquer sous chaque graphe le numéro de la courbe correspondante.

Branches infinies

Ci-dessous, le tableau des variations de x et de y. On suppose de plus que

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = +\infty, \quad \lim_{\substack{t\to 2\\ t<2}}\frac{y(t)}{x(t)} = -\infty, \quad \lim_{\substack{t\to 2\\ t>2}}\frac{y(t)}{x(t)} = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) - \frac{1}{2}x(t) = -1.$$

Indiquer chaque type de type branche infinie (préciser l'équation des droites ou la direction) :

t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\longrightarrow$ ____________________

$\longrightarrow$ ____________________

$\longrightarrow$ ____________________

$\longrightarrow$ ____________________