Devoir surveillé n°5

Sans calculatrice et sans document.
Ce devoir de 2h contient 3 exercices.
La rédaction constituant la part prépondérante de la notation, faites bon usage des brouillons.

I. Courbes

Soient A le point de coordonnées $(1,1)$, P un point de (Ox) et Q le point de (Oy) tel que les droites (AP) et (AQ) soient orthogonales.

1. Déterminer l'enveloppe des droites (PQ).
2. On obtient une parabole (pour vous en convaincre, calculez $\frac{Y-X}{2}$ puis $Y+X-1$).
   Préciser l'axe et le sommet.

On considère la spirale logarithmique Γ d'équations $M(t) = \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos t \\ e^t \cdot \sin t \end{pmatrix}$.

3. Calculer la longueur d'un arc de cette spirale entre l'origine O (de paramètre $t=-\infty$) et le point $M(t)$ et montrer qu'elle est proportionnelle à la longueur $\|\overrightarrow{OM(t)}\|$.
4. Donner une détermination de l'angle polaire au point $M(t)$ et montrer que l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ est constant.
5. Calculer la développée de la spirale logarithmique (méthode de votre choix) et montrer qu'on retrouve encore la spirale, tournée de $+\frac{\pi}{2}$.

II. Probabilités

Partie A : questions préliminaires

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ une matrice réelle dont les coefficients a et b sont positifs ou nuls.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Cette matrice est-elle toujours diagonalisable ?
3. Justifier que la plus grande valeur propre de A est $a+b$ et que la plus petite valeur propre est $a-b$.

Partie B

Soit $p \in]0,1[$. On suppose que X est une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}$ et telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\; P(X = k) = p(1-p)^k.$$

Notez que X ne suit pas tout-à-fait une loi géométrique puisque l'évènement « $X = 0$ » est possible.

Y est quant à elle une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

X et Y sont considérées ici indépendantes.

On pose également la matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}.$$

On définit deux nouvelles variables aléatoires qui sont : $S = X + Y$ la plus grande valeur propre de M et $D = X - Y$ la plus petite valeur propre de M.

1. Calculer l'espérance de X.
2. (a) Donner, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k, Y = k)$.
   (b) Calculer alors la valeur de $P(X = Y)$ et en déduire celle de $P(D = 0)$.
   (c) Calculer la probabilité $P(S = 0)$ puis la probabilité $P(D = 0 \text{ et } S = 0)$.
   (d) Les variables aléatoires D et S sont-elles indépendantes ?
   (e) Quelle est la probabilité que M soit inversible ?
3. (a) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = n + k, Y = k)$.
   (b) Calculer alors $P(X - Y = n)$ et en déduire que $P(D = n) = p(1-p)^n e^{-\lambda p}$.
   (c) Écrire l'évènement $(X \geqslant Y)$ en fonction des évènements de la famille $(D = n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer alors la probabilité que le déterminant de M soit positif.