Objectifs :

1. s'approprier la définition de vecteur propre et de valeur propre.
2. étudier quelques exemples en dimension infinie.

Exercice 1

Montrer que si λ est valeur propre d'un endomorphisme u alors λ^2 est valeur propre de u^2.

Exercice 2

Soit A une matrice carrée. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de A si et seulement si A est inversible et que, dans ce cas, si λ est valeur propre de A alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1}.

Exercice 3

Quelles sont les valeurs propres d'une symétrie ? d'un projecteur ?

Exercice 4

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 5 \\ -2 & -6 & -7 \end{pmatrix}$ et $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$.

1. Calculer le rang de A. En déduire une valeur propre λ_1 et un vecteur propre ε_1 associé.
2. Montrer que $\lambda_2 = 1$ est valeur propre de A et en donner un vecteur propre associé ε_2.
3. Dans cette question, on suppose que ε_3 est un troisième vecteur propre associé à la valeur propre λ_3 distincte des 2 autres.
   (a) Justifier que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E
   (b) Donner la matrice B de u dans la base $\mathcal{B}$. Donner la relation entre A, B et une matrice de passage P à préciser.
   (c) Calculer $\operatorname{tr} A$. Que vaut alors λ_3 ?
4. Vérifier que la valeur de λ_3 trouvée précédemment est bien une valeur propre.

Exercice 5

On étudie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\operatorname{rg}(\lambda I_2 - A) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \lambda^2 - 9 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$.
En déduire le rang de $\lambda I_2 - A$ en fonction de λ puis déterminer les éléments propres de A.

Exercice 6

Soient F et G deux sev supplémentaires dans E. Déterminer les sous-espaces propres de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ & x = x_F + x_G & \mapsto & 2x_F - 3x_G. \end{array}$$

Exercice 7

Déterminer les valeurs propres de

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'' \end{array} \right. .$$

Exercice 8

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0.
Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction $T(f)$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[\,,\ T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \text{ et } T(f)(0) = 0$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que T est un endomorphisme injectif de E.
3. Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 9

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de :

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]\\ P & \mapsto & (X+1)(X-3)P'-XP\end{array}\right.$$

Exercice 10

Déterminer les valeurs propres, les vecteurs propres, le noyau et l'image de

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]\\ P & \mapsto & X(P(X)-P(X-1))\end{array}\right.$$

Exercice 11

Soit $E=\mathbb{K}[X]$, $f\ :\left\{\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & E\\ P & \mapsto & XP\end{array}\right.$ et $F\ :\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E)\\ g & \mapsto & f\circ g-g\circ f\end{array}\right.$.
Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de F.