Objectifs :
1. se familiariser avec la définition de la convergence d'une intégrale impropre.
2. montrer la convergence des intégrales de référence.

Exercice 1

1. Soit α un réel non nul. Donner la primitive de $t \mapsto e^{-\alpha t}$.
2. Pour quelles valeurs de α l'application $X \mapsto \int_0^X e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ admet-elle une limite en $+\infty$.
3. Conclure quant-à la nature de l'intégrale impropre de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2

Montrer la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3

1. Etudier la convergence de $\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
2. On suppose maintenant $\alpha \neq 1$.
   (a) Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$.
   (b) Déterminer, selon les valeurs de α, la nature de $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
   (c) Déterminer également, selon les valeurs de α, la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4

1. Pour $a > 0$, calculer
$$\int_0^a \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$$
2. En déduire la convergence de
$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$$
et la valeur de cette intégrale.

Exercice 5

En cherchant des primitives des fonctions intégrées, déterminer la nature des intégrales suivantes :
1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$
2. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^\alpha t}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha \neq 1$.

Exercice 6

1. Montrer que pour $0 < a < b < 1$,
$$\int_a^b \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \left[-2\sqrt{1-t}\ln t\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{\sqrt{1-t}}{t}.\,\mathrm{d}t$$
2. Terminer le calcul et montrer que
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = -4 + 4\ln 2.$$

Exercice 7

On s'intéresse à l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{3x+9}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $\int_3^A \frac{3x+9}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$ ($A \geqslant 3$) par décomposition en éléments simples. Conclure.
2. Montrer que pour $x \geqslant 3$, $\frac{3x+9}{x^2-x-2} \geqslant \frac{3}{x}$. Conclure.

Quelle méthode préférez-vous ?