**Objectifs :**
1. manipuler les théorèmes de comparaison et d'équivalence.
2. manipuler les changements de variable et IPP

**Exercice 1**

Étude de

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t, \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} t\sin\frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t,$$

$$I_4 = \int_0^{1} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t, \qquad I_5 = \int_0^{\pi/2} \tan t\,\mathrm{d}t, \qquad I_6 = \int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$I_7 = \int_0^{1} \frac{1}{e^{-t}-1}\,\mathrm{d}t, \qquad I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sin\sqrt{t}+t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad I_9 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+\sin(t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

**Exercice 2**

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Démontrer la convergence de $I$ puis calculer sa valeur en intégrant par parties.

**Exercice 3**

$$J = \int_0^{1} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Démontrer la convergence de $J$.

Pour déterminer sa valeur, on déterminera une primitive en intégrant par parties.

**Exercice 4**

1. Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.
2. En effectuant un changement de variable, montrer que $I = J$.
3. Vérifier que $I + J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{t^2}}{(t-\frac{1}{t})^2+2}\,\mathrm{d}t$ et en effectuant le changement de variable $u = t - \frac{1}{t}$, calculer la valeur de $I$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t$ (effectuer un changement de variable pour se ramener à $I$).

**Exercice 5**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{1} (\ln t)^n\,\mathrm{d}t$.

1. Intégrer $I_n$ par parties et montrer par récurrence la convergence de $I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+1}$ puis calculer $I_n$.

**Exercice 6**

1. Etudier la convergence des intégrales impropres :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^4}\,\mathrm{d}x, \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3(1+x^2)}\,\mathrm{d}x, \qquad K = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

2. Donner une relation entre $I$ et $J$.
3. Donner une relation entre $J$ et $K$.
4. Calculer $K$ et en déduire $I$.

**Exercice 7** : Exo 1 : un critère qui facilite la rédaction

Montrer que si la fonction $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ est telle que $|t^2 f(t)|$ est majorée, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument) :

$$\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall t \geqslant 1,\ |t^2 f(t)| \leqslant M \quad \Longrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument.}$$

**Exercice 8** : Exo 2 : majorations

Étudier les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t, \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)\sqrt{x}}, \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \ln y e^{-y}\,\mathrm{d}y,$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z, \qquad I_5 = \int_0^{+\infty} u \cdot \sin u \cdot e^{-u}\,\mathrm{d}u, \qquad I_6 = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{v}\right)\,\mathrm{d}v.$$

On donnera la valeur de $I_5$ en passant par les complexes.

**Exercice 9** : Exo 3 : savoir mettre sous-forme canonique un trinôme, Arctan

Prouver l'existence et calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 10** : Exo 4 : équivalents, majorations

Étudier la convergence des intégrales

$$K_1 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t, \qquad K_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\cos t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t,$$

$$K_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}\cdot\tan x}\,\mathrm{d}x, \qquad K_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} u}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u.$$

On discutera en fonction du réel $\alpha$.

**Exercice 11** : Exo 5 : problème

$f$ étant une fonction continue sur $[0, +\infty[$, on suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Montrer que si $(x_n)$ et $(y_n)$ sont deux suites qui tendent vers $+\infty$, alors $\displaystyle\int_{x_n}^{y_n} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{n} 0$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ diverge. On pourra poser $x_n = (2n+1)\pi$ et $y_n = x_n + \pi$.