Exercice 1

1. Montrer que $x \to \frac{\sin x}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
2. En posant le changement de variable $\varphi(x) = 1/x$, montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

3. Quelle est alors la nature de $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$?.

Exercice 2

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

1. Effectuer le changement de variable $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ dans I. En déduire une relation simple entre I et J.
2. Montrer que $I + J = \displaystyle\frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.
4. Conclure.

Exercice 3

Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x$ puis calculer sa valeur.

Exercice 4

On pose $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^3)}{t^4}\,\mathrm{d}t$, $J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^3)}\,\mathrm{d}t$ et $K = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$

1. (a) Montrer que $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t^3)}{t} = 0$.
   (b) En déduire la convergence de I.
2. Donner une relation entre I et J.
3. Donner une relation entre J et K.
4. Calculer K et en déduire la valeur de I.

Exercice 5

1. Montrer que la fonction $x \to \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$.
2. En posant le changement de variable $\varphi(t) = \sin t$, montrer que :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$$

3. En posant le changement de variable $\psi(t) = \tan t$, montrer que :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Exercice 6

On considère la fonction : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Etudier selon les valeurs de x la convergence de $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. En déduire le domaine de définition de $\Gamma(x)$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, donner une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x-1)$ pour $x > 1$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
4. Calculer $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $B = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^6 e^{-2t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 7

Le but de l'exercice est d'étudier la nature de l'intégrale impropre

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t$$

pour différentes valeurs de α et β.

1. Traiter le cas où $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.
2. Traiter le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 2$.
3. A l'aide d'une primitive de $\frac{1}{t\ln t}$ donner la nature de
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$
4. Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{t\ln^2 t}$. En déduire la nature de
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$$
5. Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{t\ln^{\frac{1}{2}} t}$. En déduire la nature de
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^{\frac{1}{2}} t}\,\mathrm{d}t$$
6. Conjecturer la nature de l'intégrale dans le cas général :
$$\text{L'intégrale } \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t \text{ converge } \iff \ldots\ldots\ldots$$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. En déduire l'ensemble de définition de f.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que sa dérivée f' vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f'(x) = -1 + 2xf(x)$$
3. (a) Etablir pour tout $x > 0$ l'inégalité : $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2x}e^{-x^2} \leq 0$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $2xf(x) \leq 1$.
   (c) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (d) Etudier le signe de f' sur $\mathbb{R}_+$.
4. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   (a) Montrer la convergence et déterminer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (c) Donner, pour tout réel x, l'expression de $f(x) + f(-x)$ en fonction de x à l'aide d'un changement de variable.
   (d) En déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}_-$.
5. (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3e^{x^2}}{4} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que $f(x)$ est équivalent à $\frac{1}{2x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.