A. Symétries vectorielles

Dans cette partie, E est un espace vectoriel. E_1 et E_2 sont des espaces supplémentaires dans E.

[Symétrie] De même que nous avons défini les projections, nous définissons la **symétrie** par rapport à E_1 et parallèlement à E_2 comme étant l'application

$$s\ :\left\{\begin{array}{rcl} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2. \end{array}\right.$$

s est la symétrie par rapport à E_1 et parallèlement à E_2 si et seulement si $p = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s)$ est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

1. Preuve !

Pour abréger les notations, remplaçons l'expression
- « par rapport à E_1 » devient « par/ à E_1 »,
- « parallèlement à E_2 » devient « $/\!/^t E_2$ ».

C'est une double implication !

1. Montrons que « s est la symétrie par/ à $E_1, /\!/^t E_2$ $\boxed{\Rightarrow}$ $\frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s)$ est la projection sur $E_1, /\!/^t E_2$. »
L'application, notée $f = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s)$ sera la projection recherchée si elle est linéaire et vérifie

$$\forall x \in E, \text{ si } x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2, \text{ alors } f(x) = x_1.$$

D'une part, f est clairement linéaire (somme de 2 applications linéaires). D'autre part, soit $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, alors

$$f(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E(x) + s(x)) = \frac{(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)}{2} = x_1.$$

2. Montrons que « $\frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s)$ est la projection sur $E_1, /\!/^t E_2$ $\boxed{\Rightarrow}$ s est la symétrie par/ à $E_1, /\!/^t E_2$. »
Ici de même, on peut montrer que s est linéaire puisque $s = 2 \times \underbrace{\frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s)} - \underbrace{\mathrm{id}_E}$ est une combinaison d'applications linéaires.
Soit $x \in E$, notons encore $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. On sait que $\frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s)$ est la projection sur $E_1, /\!/^t E_2$ donc

$$\frac{1}{2}(x + s(x)) = x_1 \quad \text{soit} \quad s(x) = 2x_1 - x = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2.$$

On reconnaît la symétrie par/ à $E_1, /\!/^t E_2$.

Soit s la symétrie par rapport à E_1 et parallèlement à E_2. Alors :

1. s est linéaire
2. $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

2. Preuve !

1. Soient x et y dans E et λ un scalaire. Introduisons x_1, x_2, y_1, y_2 tels que

$$(x_1, y_1) \in E_1^2, \quad (x_2, y_2) \in E_2^2, \quad x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2.$$

Alors, par définition de la symétrie s, on a $s(x) = x_1 - x_2$ et $s(y) = y_1 - y_2$.
Par ailleurs, $\lambda x + y = \underbrace{\lambda x_1 + y_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda x_2 + y_2}_{\in E_2}$ (on a utilisé le fait qu'un sev est stable par combinaisons linéaires). Autrement dit, la composante de $\lambda x+y$ selon E_1 (resp. selon E_2) est λx_1+y_1 (resp. λx_2+y_2).
Par définition de s, on a $s(\lambda x + y) = \lambda x_1 + y_1 - (\lambda x_2 + y_2)$. On termine le calcul :

$$s(\lambda x + y) = \lambda x_1 + y_1 - (\lambda x_2 + y_2) = \lambda(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = \lambda s(x) + s(y).$$

2. Il s'agit d'égalités d'ensembles (nous n'avons aucune information sur les dimensions) : il faut prouver les deux inclusions :

- Montrons que $E_1 \subset \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$:
  Soit $x \in E_1$. x se décompose $x = \underbrace{x}_{\in E_1} + \underbrace{0_E}_{\in E_2}$ (c'est une façon de donner les composantes de x selon E_1 et E_2). On en déduit que $s(x) = x - 0_E$ puis que $(s - \mathrm{id}_E)(x) = s(x) - x = 0_E$ ce qui montre bien que $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$.
- Montrons que $E_1 \supset \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$:
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$, c'est-à-dire vérifiant $(s - \mathrm{id}_E)(x) = s(x) - x = 0_E$ ou encore $s(x) \overset{\star}{=} x$.
  Introduisons maintenant $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$: les composantes de $x = x_1 + x_2$. Par définition de s, on a $s(x) \overset{\circ}{=} x_1 - x_2$. Ainsi, en utilisant les deux égalités $\overset{\star}{=}$ et $\overset{\circ}{=}$:

$$x_1 - x_2 \overset{\circ}{=} s(x) \overset{\star}{=} x = x_1 + x_2.$$

  Ce qui prouve que $x_2 = 0_E$ et donc $x = x_1 \in E_1$.

Remarque : une démonstration par équivalences successives était possible. Mettons-la en œuvre pour E_2 :
Calcul préliminaire : soit $x \in E$ un vecteur *quelconque*, introduisons encore $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ vérifiant $x = x_1 + x_2$ ainsi $s(x) = x_1 - x_2$. On remarque que $(s + \mathrm{id}_E)(x) = x_1 - x_2 + x_1 + x_2 = 2x_1$. Ainsi

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) &\iff (s + \mathrm{id}_E)(x) = 2x_1 = 0_E \\ &\iff x = x_2 \in E_2. \end{aligned}$$

Ainsi,$\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E_2$.

Un endomorphisme $s : E \to E$ est une symétrie si et seulement si s est linéaire et $s \circ s = \mathrm{id}_E$

3. Preuve !
   (*Indic :* pour démontrer la réciproque, il faut trouver E_1 et E_2 tels que $E = E_1 \oplus E_2$... Le théorème 2 indique deux sev candidats. On pourra ensuite poser $x_1 = \frac{x+s(x)}{2}$ et $x_2 = \frac{x-s(x)}{2}$.)

La décomposition « $x = \frac{x+s(x)}{2} + \frac{x-s(x)}{2}$ » vous a été donnée... comment aurait-on pu la deviner ?

L'implication $\boxed{\Rightarrow}$ est très simple :
Si s est une symétrie, alors s est linéaire et il existe E_1 et E_2 tels que s soit la symétrie par/à E_1 et $/\!\!/^t$ à E_2.
Soit $x \in E$ et $x = x_1 + x_2$ sa décomposition selon $E_1 \oplus E_2$, on a $s(x) = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{(-x_2)}_{\in E_2}$. De cette écriture, on déduit que $s(s(x)) = x_1 - (-x_2) = x$. Ceci valant pour tout $x \in E$, on a prouvé que $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Voyons la réciproque $\boxed{\Leftarrow}$:
Soit s un endomorphisme de E qui vérifie $s \circ s = \mathrm{id}_E$. *Définissons* $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
1re étape : Il faut montrer que $E = E_1 \oplus E_2$:

- Montrons que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$:
  Si $x \in E_1 \cap E_2$, alors $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ donc $s(x) = x$ d'une part. Et d'autre part, $x \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ donc $s(x) = -x$. On en déduit que $x = -x$ puis que $x = 0_E$.
- Montrons que $E = E_1 + E_2$:
  Soit $x \in E$, on cherche $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x \overset{\pentagon}{=} x_1 + x_2$.
  (On peut utiliser la décomposition proposée dans l'indication, mais on peut aussi comprendre d'où elle vient : c'est le raisonnement par analyse-synthèse :) Analyse : si ces vecteurs existent, ils vérifient

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \in & E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \\ s(x_1) & = & x_1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_2 & \in & E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \\ s(x_2) & = & -x_2 \end{array}$$

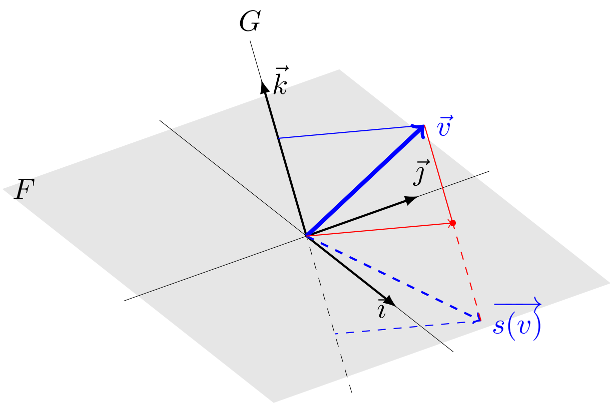
  Ainsi, $s(x) = s(x_1) + s(x_2)$ (car s linéaire) d'où $s(x) \overset{\bell}{=} x_1 - x_2$. En utilisant les égalités $\overset{\pentagon}{=}$ et $\overset{\bell}{=}$, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & \overset{\pentagon}{=} & x_1 + x_2 \\ s(x) & \overset{\bell}{=} & x_1 - x_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{x+s(x)}{2} \\ x_2 & = & \frac{x-s(x)}{2} \end{array} \right.$$

  Synthèse : pour x fixé dans E, posons $x_1 = \frac{x+s(x)}{2}$ et $x_2 = \frac{x-s(x)}{2}$.
  On vérifie que $(s - \mathrm{id}_E)(x_1)$ =(calculs)= 0_E donc que $x_1 \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = E_1$. De même, on vérifie que $x_2 \in E_2$ et enfin, on constate que $x_1 + x_2 = \frac{x+s(x)}{2} + \frac{x-s(x)}{2} = x$ (on l'a fait exprès avec $\overset{\pentagon}{=}$). Ainsi $x \in E_1 + E_2$.
  2e étape : Il faut montrer que si $x = x_1 + x_2$ est la décomposition de x selon $E_1 \oplus E_2$, alors $s(x) = x_1 - x_2$ (ce qui montre que s est bien la symétrie par/à E_1, $/\!/^t E_2$). Or

$$\begin{array}{rcll} s(x_1) & = & x_1 & \text{car } x_1 \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \\ s(x_2) & = & -x_2 & \text{car } x_2 \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \\ s(x) & = & s(x_1) + s(x_2) & \text{par linéarité} \\ & = & x_1 - x_2. & \end{array}$$

4. On pose $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((2, -1, 0))$.
   (a) Etablir la matrice, dans la base canonique, de la projection sur F parallèlement à G.
   (b) En déduire la matrice, dans la base canonique, de la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.
   (c) En déduire la matrice, dans la base canonique, de la symétrie par rapport à G et parallèlement à F.



Soit $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ un vecteur que l'on cherche à décomposer : $v=v_F+v_G$ avec $v_F\in F$ et $v_G\in G$. Le raisonnement est une analyse-synthèse : si les vecteurs $v_F=(x_F,y_F,z_F)\in F$ et $v_G\in G$ existent, alors

- $x_F+y_F-z_F=0$ (condition d'appartenance à F),
- $\exists t\in\mathbb{R}$ tel que $v_G=t(2,-1,0)=(2t,-t,0)$ (condition d'appartenance à G),
- $(x_F,y_F,z_F)+(2t,-t,0)=(x,y,z)$.

Ceci donne lieu à un système d'équations que l'on résout par la méthode de son choix :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_F & +y_F & -z_F & & = & 0\\ x_F & & & +2t & = & x\\ & y_F & & -t & = & y\\ & & z_F & & = & z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} t & = & x & +y & -z\\ x_F & = & -x & -2y & +2z\\ y_F & = & x & +2y & -z\\ z_F & = & & & z\end{array}\right.$$

Ainsi, $(x,y,z)=\underbrace{(-x-2y+2z,x+2y-z,z)}_{p(x,y,z)\in F}+\underbrace{(2x+2y-2z,-x-y+z,0)}_{\in G}$ (p : la projection demandée).

On en déduit que $\left\{\begin{array}{ccc} p(1,0,0) & = & (-1,1,0)\\ p(0,1,0) & = & (-2,2,0)\\ p(0,0,1) & = & (2,-1,1)\end{array}\right.$ puis que la matrice de p dans la base canonique vaut :

$$P=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

D'après les premières questions, la symétrie par/à F, $/\!\!/\,{}^tG$ est $s=2p-\mathrm{id}_E$. Sa matrice dans la base canonique est donc

$$S=2P-I_3=\begin{pmatrix}-3 & -4 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Enfin, pour s' : symétrie par/à G, $/\!\!/\,{}^tF$, on peut remarque que $s'=-s$ donc que sa matrice est

$$S'=-S=\begin{pmatrix}3 & 4 & -4\\ -2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

B. Généralisation

E est toujours un espace vectoriel. F et G sont supplémentaires dans E.
On définit une nouvelle application par

$$f\ :\left\{\begin{array}{ccc} E=F\oplus G & \longrightarrow & E\\ x=x_1+x_2 & \mapsto & 2x_1-3x_2.\end{array}\right.$$

On admet qu'elle est linéaire.

5. Montrer que $F=\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id}_E)$ et $G=\mathrm{Ker}(f+3\mathrm{id}_E)$.
6. Montrer que $f^2+f-6\mathrm{id}_E=0_{\mathscr{L}(E)}$.

NB : f^2 désigne ici $f\circ f$.

Réciproquement, soit g un endomorphisme de E vérifiant $g^2+g-6\mathrm{id}_E=0_{\mathscr{L}(E)}$. On souhaite montrer qu'il existe F et G, supplémentaires dans E, tels que

$$g\ :\left\{\begin{array}{ccc} E=F\oplus G & \longrightarrow & E\\ x=x_1+x_2 & \mapsto & 2x_1-3x_2.\end{array}\right.$$

7. Quels sont les bons candidats pour F et G ?
   Conclure.

ÉPILOGUE : un phénomène général se dégage de l'étude des projecteurs ($p^2 - p = 0_{\mathscr{L}(E)}$), des symétries ($s^2 - \mathrm{id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$) et de f ($f^2 + f - 6\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$) : dans les trois cas, l'endomorphisme est « **annulé** par un polynôme ». Par exemple, pour f,

$$\text{soit } P(X) = X^2 + X - 6 \qquad \text{alors } P(f) = f^2 + f - 6\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Cette feuille d'entraînement a été inspirée par un résultat général :

Soit P un polynôme sécrivant $P(X) = Q(X) \times R(X)$, Q et R étant premiers entre-eux.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Si $P(\varphi) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $E = \mathrm{Ker}\,\big(Q(\varphi)\big) \oplus \mathrm{Ker}\,\big(R(\varphi)\big)$.

Par exemple pour les symétries : $X-1$ et $X+1$ sont premiers entre eux et $(X+1)(X-1) = X^2-1$ annule s et vous avez prouvé que

$$E = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E).$$

Soit $E = E_1 \oplus E_2$.

NB : On a

$$p = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + s) \iff s = 2p - \mathrm{id}.$$

Pour ne pas faire de confusion, notons

- s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2,
- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2,
- $f = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + s)$ et
- $g = 2p - \mathrm{id}$.

Littéralement, le but de la première question est de montrer que si φ est un endomorphisme de E, alors

$$\varphi \text{ est la symétrie par rapport } \ldots \iff \tfrac{1}{2}(\mathrm{id} + \varphi) \text{ est la projection sur } \ldots$$

Avec nos notations :

$$\varphi = s \iff \tfrac{1}{2}(\mathrm{id} + \varphi) = p.$$

Or

$$\begin{aligned} \varphi = s \quad &\iff \quad \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \varphi) = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + s) \quad (= f) \\ &\iff \end{aligned}$$