Devoir non-surveillé n°7

L'objet de ce DNS est de découvrir et manipuler de nouvelles notions sur les courbes planes (fiche 44). Aucune démonstration n'est demandée et l'ensemble du formulaire est clairement explicité dans ce document. Les parties I et II pourront être traitées dans l'ordre de votre choix.

A rendre en fin de séance :

1. Une copie par groupe de travail
2. un mail contenant les liens vers des feuilles Geogebra des exercices 6, 8 et 11. Utiliser pour cela Geogebra en ligne `https://www.geogebra.org/classic`

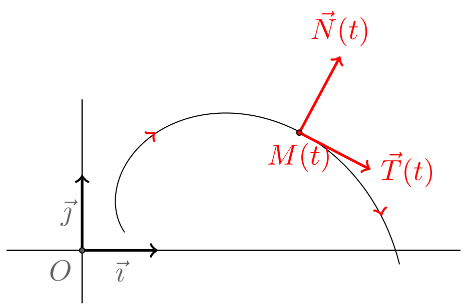
Dans tout ce devoir, on suppose que la courbe $\vec{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$ étudiée n'admet pas de point stationnaire.

I. Courbure

Repère de Frenet

Au point $M(t)$ il est possible de définir localement un repère orthonormé $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ de la façon suivante :

1. le vecteur $\vec{T}(t)$ est le vecteur tangent à la courbe, de norme 1 et orienté selon les t croissants. Il se calcule par la formule $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{F}'(t)}{\|\vec{F}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. On l'appelle **vecteur tangent unitaire**.
2. Le vecteur $\vec{N}(t)$ s'obtient par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ du vecteur $\vec{T}(t)$. On a alors $\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$. On l'appelle **vecteur normal unitaire**.



Le repère ainsi obtenu est appelé **repère de Frenet**.

Exercice 1 Déterminer le repère de Frenet en tout point de la courbe $\vec{F}(t) = (\operatorname{ch} t, t)$.

Exercice 2 Sous Geogebra :

1. tracer cette courbe,
2. créer un point M de coordonnées $(\operatorname{ch} t, t)$ piloté par un curseur t,
3. représenter le repère de Frenet au point M

Courbure

On considère maintenant la droite passant par $M(t)$ et de vecteur directeur $\vec{N}(t)$. On l'appellera **droite normale** à la courbe au point $M(t)$.

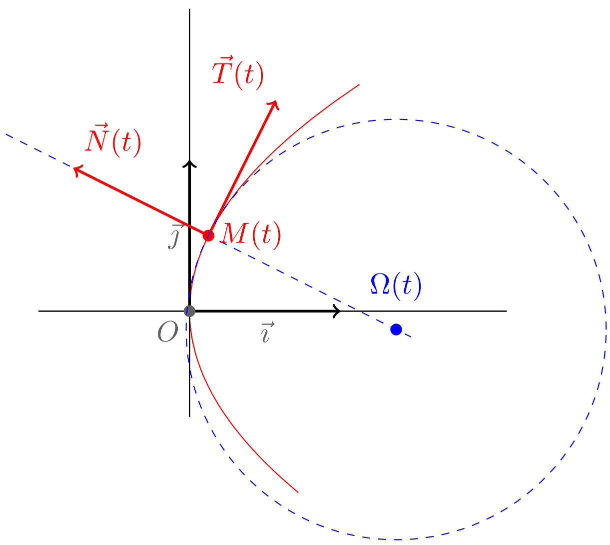
Exercice 3 Sous Geogebra :

1. représenter la droite normale au point M.
2. créer un point I qui appartient à cette droite
3. créer le cercle de centre I et passant par M.
4. chercher "à la main" la position du point I pour que le cercle approche au mieux l'arc de courbe autour du point M.

Le cercle trouvé dans la question précédente est appelé **cercle osculateur**. Son rayon $R(t)$ se calcule par exemple avec la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}(t) \times \frac{1}{||F'(t)||} = \frac{1}{R(t)}\vec{N}(t)$$

Le centre Ω de ce cercle est appelé **centre de courbure**.



Exercice 4 Calculer $R(t)$ dans le cas où $\vec{F}(t) = (\operatorname{ch} t, t)$. En déduire les coordonnées du centre de courbure $\Omega(t)$.

Exercice 5 Sous Geogebra : représenter le centre de courbure et le cercle osculateur. Faire varier t et contempler !

Développée

La **développée** d'une courbe est par définition l'ensemble de ses centres de courbure.

Exercice 6 Calculer l'équation de la développée de $\vec{F}(t) = (\operatorname{ch} t, t)$.

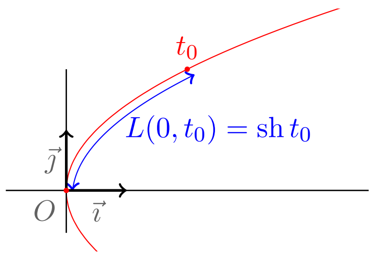
Exercice 7 Sous Geogebra : afficher la développée. Afficher la trace des droites normales à la courbe. Qu'observez-vous ?

II. Abscisse curviligne

Longueur d'une courbe

La **longueur d'un arc de courbe** entre les points de paramètres $t = a$ et $t = b$ s'obtient en intégrant la norme du vecteur vitesse. Elle est donc égale à $L(a, b) = \int_a^b \|\vec{F}'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, \mathrm{d}t$

Exercice 8 Soit $F(t) = (\operatorname{ch} t, t)$. Vérifier que la longueur de l'arc de courbe entre les points de paramètre $t = 0$ et $t = t_0$ est égal à $\operatorname{sh} t_0$.



Abscisse curviligne

A chaque point de la courbe F correspond une valeur de t. On peut ainsi naturellement graduer la courbe à l'aide de ce paramètre. L'inconvénient de cette graduation est qu'elle n'est pas "régulière" : entre $F(t)$ et $F(t+1)$ le point parcourt une distance variable qui est à priori différente de 1. C'est précisément ce que l'on va chercher à corriger.

Dans un premier temps nous allons déterminer une graduation de la courbe qui sera "régulière" : la distance parcourue sur la courbe pourra se mesurer grâce à cette nouvelle graduation que l'on appellera **abscisse curviligne**.

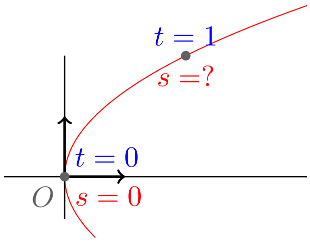
Pour se faire, on définit d'abord une origine sur la courbe en un point $M(t_0)$ et l'on mesure la longueur des arcs entre les points $t = t_0$ et t par la formule : $S(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{F}'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau$.

Exercice 9 Soit $F(t) = (\operatorname{ch} t, t)$. On utilise l'abscisse curviligne $S(t) = \int_0^t \|\vec{F}'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau$.

1. Sur la courbe, représenter (en bleu) les points $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$.
2. Calculer et écrire sur ce même dessin les valeurs de $s = S(t)$ correspondantes (en rouge).
3. Pour quelle valeur de t a-t-on $s = 1$, $s = 2$, $s = 3$? Représenter ces points sur la courbe.

NB : on pourra utiliser la bijection réciproque de la fonction ch sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note habituellement argch

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \, , \, y = \operatorname{ch} x \iff x = \operatorname{argch} \, y$$



Dans un second temps on cherche un nouveau paramétrage de la courbe pour lequel le paramètre ne sera non plus t mais s. Il suffit pour cela de considérer $\vec{G}(s) = \vec{F}(S^{-1}(s))$.

Exercice 10 Donner le paramétrage en fonction de $s = S(t)$ dans le cas ou $\vec{F}(t) = (\operatorname{ch} t, t)$ et $S(t) = \int_0^t \|\vec{F}'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau$.

Exercice 11 Sous Geogebra :

1. représenter la courbe F,
2. créer un point M de coordonnées $(\operatorname{ch} t, t)$ piloté par un curseur t,
3. créer un point N de coordonnée $G(s)$ piloté par un curseur s représentant l'abscisse curviligne.

III. Un autre exemple

Reprendre l'ensemble des questions précédentes dans le cas où $F(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.