Objectifs :
1. Se familiariser avec le calcul d'un déterminant.
2. Résolution de systèmes à paramètre.
3. Calcul d'un déterminant à l'aide d'une formule de récurrence.

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Calculer, sous forme factorisée, les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ca \\ b & c & bc \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 2

Calculer le déterminant...

1. de la matrice carrée d'ordre n dont la diagonale, la première ligne et la première colonne ne comportent que des 1 et les autres coefficients valent 0.
2. de la matrice $A = ((a_{ij}))$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ii} = i$ et $a_{ij} = 2$ si $i \neq j$.
3. $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ n & n & \dots & & n \end{vmatrix}$ et $d_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{vmatrix}$.

détaillés

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant, en discutant selon la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{rrcl} x & +(\lambda+1)y & = & 1 \\ \lambda x & +(\lambda+4)y & = & 2 \end{array} \right.$$

2. Résoudre le système linéaire suivant, d'inconnues (x, y, z), où (a, b, c, ℓ, m, n) sont six réels fixés. Puis donner une interprétation géométrique.

$$(\Sigma_2) \left\{ \begin{array}{rcl} cy - bz & = & \ell \\ az - cx & = & m \\ bx - ay & = & n \end{array} \right.$$

3. On considère le système :

$$(\Sigma_3) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} mx & + & my & & & = & 2(m+1) \\ (1-m)x & + & (2m+1)y & + & 2(m+1)z & = & m \\ 2x & + & (m+1)y & + & (m-1)z & = & m^2 - 2m + 9 \end{array} \right.$$

(a) Pour quelles valeurs de m ce système admet-il une solution unique ? (On ne demande pas d'expliciter la solution)

(b) Dans les autres cas, donner les solutions et une interprétation géométrique dans l'espace.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b dans $\mathbb{R}$. On définit Δ_n le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & a+b \end{vmatrix}$$

L'objectif de l'exercice est de montrer de deux façons que $\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

1. Calculer Δ_n dans le cas où $a = b$
2. **Première méthode.**

   On pose D_n le déterminant d'ordre n suivant : $D_n = \begin{vmatrix} b & a & \dots & \dots & a \\ b & a+b & a & \dots & a \\ b & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & b & \dots & b & a+b \end{vmatrix}$

   (a) Montrer que $D_n = b^n$.

   (b) Montrer que $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + b^n$.

   (c) Montrer par récurrence que $\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.
3. **Seconde méthode.**

   (a) Montrer que $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & -b & 0 & \dots & 0 \\ -a & a+b & a & \dots & a \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & b & \dots & b & a+b \end{vmatrix}$

   (b) En déduire une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par Δ_n.

   (c) Retrouver la valeur de Δ_n.

Exercice 5

Le programme python suivant permet de s'entraîner au calcul de déterminant.

```python
import numpy as np
import random as rd

n=4
A=np.eye(n)
val=rd.randint(-5,5)
A[1][1]=val
for i in range(30):
    if rd.randint(0,1)==1:
        A=np.transpose(A)
    r=rd.randint(0,n-1)
    r2=(r+rd.randint(1,n-1))%n
    A[r]=A[r]+(2*rd.randint(0,1)-1)*A[r2]

print("Donne la valeur du déterminant de \n"+str(A))
if float(input()==val):
    print("Bravo !")
else:
    print("La réponse était "+str(val)+". Essaie encore !")
```

1. Décrire son fonctionnement.
2. Tester-le !