Objectifs :
1. Calcul d'un déterminant par blocs.
2. Calcul du déterminant d'une application linéaire.
3. Utilisation « géométrique » du déterminant, etc...

Exercice 1
Soient A une matrice d'ordre n, B une matrice d'ordre p et C une matrice de taille $n \times p$.
Vérifier que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$.
Retrouver ainsi la formule de calcul d'un déterminant par blocs :

$$\text{dét} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{dét}(A)\,\text{dét}(B)$$

.

Application : calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 8 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Exercice 2
Calculer les déterminants des endomorphismes φ et ψ de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par

$$\varphi(P) = P' + P \quad \text{et} \quad \psi(P) = XP' + P(1).$$

Exercice 3
Calculer le déterminant de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\varphi(A) = {}^tA$$

.

Exercice 4
Soit A une matrice carrée de taille n et B la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coefficients de A.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $\text{dét}(B) = P(x)$.
2. Trouver le degré de P et donner $P(0)$ et le coefficient dominant.
3. Application : en déduire, pour tout triplet (a, b, c) de réels, la valeur du déterminant d'ordre n suivant : $D_n(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & . & . & c \\ b & a & . & & . \\ . & . & . & . & . \\ . & & . & . & c \\ b & . & . & b & a \end{vmatrix}$.

Exercice 5
Première partie : Quel est le volume du tétraèdre dont les sommets sont

$$A = (1; -1; 3), \quad B = (4; 1; 3), \quad C = (-2; -3; 10), \quad D = (-2; -5; 5)\ ?$$

Donner l'isobarycentre G de ce tétrahèdre puis les volumes de $(GABC)$, $(GBCD)$, $(GCDA)$ et $(GDAB)$. Que remarque-t-on ?

Deuxième partie : Dans le plan, on considère trois points A, B et C.
α, β et γ sont trois réels vérifiant $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
On introduit $G = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma}$ appelé barycentre de (A, B, C) affublés des poids (α, β, γ).
Montrer que le triplet $(\mathcal{A}_{GBC}, \mathcal{A}_{GCA}, \mathcal{A}_{GAB})$ (aires algébriques des triangles) est proportionnel à (α, β, γ).
(Épilogue : il est ainsi possible de repérer n'importe quel point P du plan par la donnée de $(\mathcal{A}_{PBC}, \mathcal{A}_{PCA}, \mathcal{A}_{PAB})$ qu'on appelle ses coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C).)

Exercice 6

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{vmatrix}$, où $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$.

Exercice 7

En Développant par rapport à la dernière ligne, montrer que le déterminant $\begin{vmatrix} \cos(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\beta) & \cos(\theta+\gamma) \\ \sin(\theta+\alpha) & \sin(\theta+\beta) & \sin(\theta+\gamma) \\ \sin(\beta-\gamma) & \sin(\gamma-\alpha) & \sin(\alpha-\beta) \end{vmatrix}$ est indépendant de θ.
Calculer ce déterminant en donnant à θ une valeur particulière.

Exercice 8

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites *congruentes* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$B = {}^tPAP.$$

1. Montrer que si A et B sont congruentes, alors $\mathrm{dét}(AB) \geqslant 0$.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas congruentes.

Exercice 9

Résoudre les systèmes suivants (où a est un paramètre réel) :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 3x + 3y - z = 4a \\ (2-a)x + 2y - 2z = -2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + y + (a-1)z = 3a \\ 2ax + ay - az = -1 \\ x - y + z = -a \\ (5a+3)x + 2(a-1)y + (2-a)z = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = a \end{cases}$$