Exercice 1

Quel est le domaine de définition des fonctions ci-dessous ?

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{xy} \qquad (x,y) \mapsto \ln\left(\frac{y-x^2}{y}\right) \qquad (R_1,R_2,R_3) \mapsto \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

Continuité, limites

Exercice 2

Que dire de :

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}), \quad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2} \quad ?$$

Conclusion ?

Exercice 3

Étudier les limites en $(0,0)$ de :

1. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
2. $\frac{|x+y|}{x^2+y^2}$
3. $\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$

Exercice 4

La fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1, \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est-elle continue ?

Exercice 5

Soit : $f \ : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array} \right.$

Montrer que f est continue dans toutes les directions en $(0,0)$ [considérer un vecteur non-nul : (a,b) puis calculer $\lim_{t\to 0} f(ta,tb)$], mais n'est pas continue en $(0,0)$ [indication : $f(t^2,t)=\dots$].

Dérivées partielles

Exercice 6

Former le gradient et la matrice hessienne de g, h, k et ℓ en un point (x,y) :

$$\begin{array}{ll} g(x,y) = xy & h(x,y) = \ln(xy) \\ k(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{3}} & \ell(x,y) = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{array}$$

Déf. On appelle **gradient** d'une fonction $f(x,y)$ au point (x_0,y_0) le vecteur noté $\overrightarrow{\nabla} f_{(x_0,y_0)}$ égal à $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$. De même, la matrice **hessienne** de f en (x_0,y_0) est la matrice $H(f)_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Si f est une fonction, la **dérivée au point** A **dans la direction** $\overrightarrow{u}$ est par définition :

$$\mathrm{D}_{\overrightarrow{u}} f(A) = \lim_{t\to 0}\frac{f(A+t\overrightarrow{u})-f(A)}{t}.$$

Calculer « à la main » la dérivée en $A=(1,0)$ dans une direction $\overrightarrow{u}$ de

$$f(x,y) = -2x^2+3xy+5y^2$$

et vérifier que celle-ci s'exprime bien sous la forme du produit scalaire

$$\mathrm{D}_{\overrightarrow{u}} f(A) = \overrightarrow{\nabla} f_{(A)} \cdot \overrightarrow{u}.$$

Quelle choix de $\overrightarrow{u}$ (unitaire) permet de rendre celle-ci maximale ? minimale ?

Exercice 8

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \geqslant x^2 \text{ ou } y \leqslant 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en $(0,0)$.
2. f est-elle continue et de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 9

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) \end{array} \right. \quad \text{est continue et} \quad f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 10

La fonction f définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$

est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Règle de la chaîne

Exercice 11

1. Calculer $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ quand $t = 0$ si $w = \sin(xy + \pi)$, $x = e^t$ et $y = \ln(t+1)$.
2. Calculer $\frac{\partial w}{\partial r}$ et $\frac{\partial w}{\partial s}$ quand $r = \pi$ et $s = 0$ si $w = \sin(2x - y)$, $x = r + \sin s$ et $y = rs$.

Développements limités, plans tangents

Exercice 12

Trouver l'équation du plan tangent à la surface $S = \{(x,y,z) \mid xyz = 1\}$ au point $(2, 1, 1/2)$.

Exercice 13

Pouvez-vous, à l'aide d'un développement limité, donner une estimation de

$$A = \cos(3.2)\, e^{0.1} - \ln(1.01) \sin(0.8)$$

... plus précise que $A \approx -1$?

On étudiera $\cos x \cdot e^y - \ln(1+y^2)\sin(x/4)$ au voisinage du point $(\pi, 0)$

Extrema

Exercice 14

On suppose que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et soit $a \in U$.

1. Montrer que si f présente un extremum en a, alors les dérivées partielles de f en a sont nulles. Un tel point (où les dérivées partielles s'annulent) est appelé point critique de f.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$. Montrer que f admet $(1,2)$ pour seul point critique. En effectuant le changement d'origine $x = 1 + h$ et $y = 2 + k$ et en calculant $f(1+h, 2+k)$, prouver que f admet un minimum local en $(1,2)$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$.
   (a) Montrer que f possède 4 points critiques.
   (b) En calculant $f(t,0)$ et $f(0,t)$, prouver que f n'admet pas d'extrémum en $(0,0)$, bien que ce point soit un point critique.
   (c) Pour (h,k) *petit*, exprimer $f(4+h, k)$. En déduire que f admet un minimum local en $(4,0)$.
   (d) En s'aidant des questions précédentes, faire l'étude locale aux autres points critiques.

Exercice 15

On désire fabriquer une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, sans couvercle sur le dessus. Le volume de cette boîte doit être égal à $0.5\mathrm{m}^3$ et pour optimiser la quantité de matière utilisée, on désire que la somme des aires des faces soit aussi petite que possible.

Quelles dimensions doit-on choisir pour fabriquer la boîte ?