Exercice 1

On pose trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On pose F définie par : $F(t) = f\big(t^2, g(t, h(t)), h(t)\big)$. Calculer $F'(t)$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Calculer les dérivées partielles de :

1. $g(x, y) = f(y, x)$
2. $g(x) = f(x, x)$
3. $g(x, y) = f(x - y, y - x)$
4. $g(x, y) = f(y, f(x, x))$
5. $g(x) = f(x, f(x, x))$

Exercice 3

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array} \right.$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit F définie par $F(s, t) = f\big(s^2 t, s.f(t, t^2)\big)$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial t}$.

Exercice 4

On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{2} \end{array} \right.$ où K est le disque fermé de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.

1. Compléter le paramétrage suivant pour que ce soit un paramétrage du bord de K :
$$\left\{ \begin{array}{rl} x(t) = & 1 + \cos(t) \\ y(t) = & \dots \end{array} \right.$$
Que représente t ? Faire un schéma.
2. Etudier les extremums globaux de f.

Exercice 5

Soit $f(x, y) = y^2 - x^2 y + x^2$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$

1. Représenter D et trouver un paramétrage de Γ le bord de D.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ
5. Déterminer le minimum et le maximum de f sur D

Exercice 6

On considère un polygone convexe à n côtés inscrit dans le cercle unité du plan euclidien. On note P son périmètre, et $e^{ia_1}, e^{ia_2}, \dots, e^{ia_n}$ les affixes de ses sommets, avec $0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2\pi$.

1. On pose, pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $t_k = \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k)$ et $t_n = \frac{1}{2}(a_1 + 2\pi - a_n)$.
Montrer que $P = 2\sum_{k=1}^{n} \sin(t_k)$.
2. Montrer que P est maximal lorsque le polygone est régulier.

Exercice 7

Soient A, B, C trois points non-alignés de l'espace physique. On pose pour tout M, $f(M) = AM + BM + CM$.

1. Étudier la différentiabilité de $g(M) = AM$ et calculer sa différentielle.
2. Démontrer que f atteint son minimum en au moins un point et que tout point où f atteint son minimum est situé dans le plan affine (ABC).
3. Démontrer que f est strictement convexe, et en déduire que f atteint un unique minimum.
4. Soit F le point où f atteint son minimum. On suppose que F est distinct de A, B et C. Démontrer que
$$\frac{1}{AF}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{BF}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{CF}\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}.$$