Optimisation par recherche d'extremum

Exercice 1

On désire fabriquer une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, sans couvercle sur le dessus. Le volume de cette boîte doit être égal à 0.5m^3 et pour optimiser la quantité de matière utilisée, on désire que la somme des aires des faces soit aussi petite que possible.

Quelles dimensions doit-on choisir pour fabriquer la boîte ?

Exercice 2

Les brasseries A et B opèrent dans le même secteur et proposent des produits comparables, de sorte que les ventes de la bière A affectent négativement celles de la bière B, et vice versa. Supposons que si A produit x litres de bière par mois et que B en produit y, alors les profits mensuels P et Q de A et B se chiffrent respectivement à

$$P = 2x - \frac{2x^2 + y^2}{10^6}, \qquad Q = 2y - \frac{4y^2 + x^2}{2 \times 10^6}.$$

Quelle est la somme des profits des brasseries A et B si chacune détermine indépendamment son niveau de production de façon à maximiser son propre profit ? Et si elles s'entendent pour maximiser conjointement leur profit commun ?

Exercice 3

1. (a) Soit un triplet (x, y, z) de réels positifs tel que $x+y+z = 30$. Montrer que $(x, y) \in K$ avec $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 30\}$. Représenter alors K.

   (b) Soit $c \in [-1, 1]$. Etudier les extrema globaux de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (1-c)(2x^2 + 2y^2 - 60x - 60y + 2xy) + 900 \end{array} \right.$$

2. Dans cette partie, X, Y, et Z sont des variables aléatoires. On rappelle que la covariance de deux variables aléatoires X et Y est égale à

$$cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$$

   (a) Que vaut $cov(X, Y)$ lorsque $X = Y$?

   (b) Montrer, que pour Y fixé, l'application $\varphi(X) = cov(X, Y)$ est linéaire.

   (c) Montrer que pour tous a et b réels,

$$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab.cov(X, Y)$$

   (d) Donner de même une expression de

$$V(aX + bY + cZ)$$

   en fonction de $V(X)$, $V(Y)$, $V(Z)$, $cov(X, Y)$, $cov(Y, Z)$ et $cov(Z, X)$.

3. Monsieur Dupont dispose de 30 euros et souhaite investir cet argent en bourse. Il a le choix entre 3 actions dont les rendements sont modélisés par des variables aléatoires discrètes notées X, Y et Z. Le gain est noté G. Par exemple, si monsieur Dupont investit x euros dans la première action, y euros dans la seconde et z euros dans la troisième, le gain sera

$$G = xX + yY + zZ$$

   (a) Calculer alors l'espérance de gain $E(G)$ en fonction de x, y, z, $E(X)$, $E(Z)$ et $E(Z)$

   (b) On suppose que les variances de X, Y et Z sont égales à 1 et que $cov(X, Y) = cov(Y, Z) = cov(Z, X) = c$ avec $c \in [-1, 1]$. Calculer $V(G)$ en fonction de x et y et montrer que $V(G) = f(x, y)$.

   (c) Monsieur Dupont est un néophyte et il souhaite prendre le moins de risques possibles. Pour cela il cherche à minimiser la variance de son investissement. Comment doit-il répartir les 30 euros ?