Prérequis : le cours de probabilité de première année et celui sur les séries numériques.

Objectifs :

1. manipuler les intersections et réunions dénombrables d'évènements ;
2. illustrer la propriété de continuité croissante d'une probabilité ;
3. utiliser le conditionnement et les formules de bayes sur un espace probabilisé dénombrable.

Exercice 1

Mon loto-perso est une urne contenant 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les évènements $A :=$ « tirage d'un nombre pair » et $B :=$ « tirage d'un multiple de 3 ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?
Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Exercice 2

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{\mathbb{N}}$ l'univers représentant des lancers de dés indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement :

$$A_n : \text{"Le } n\text{-ème lancer est un 4"}$$

Exprimer à l'aide d'une phrase, puis de quantificateurs, les événements : $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ et $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$.

Exercice 3

Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $P(\{n\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 4

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que $\forall A \in \mathcal{A}\,,\ P(A) = \sum_{k\in A} P(\{k\})$.
Montrer que P est une probabilité dans les cas suivants :

1. $\forall k \in \mathbb{N}\,,\ P(\{k\}) = \frac{1}{2^{k+1}}$
2. λ est un réel fixé dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
3. $P(\{k\}) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
4. p est un réel fixé dans $]0, 1[$, $P(\{0\}) = 0$ et $P(\{k\}) = p(1-p)^{k-1}$ sinon.

Exercice 5

On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche et on joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce parfaite (les lancers sont indépendants). A chaque fois que l'on obtient face, on ajoute une boule noire dans l'urne et la première fois que l'on obtient pile, on tire au hasard une boule dans l'urne. **Le jeu s'arrête alors.**

On note :

- F_n l'événement "le n-ème lancer donne face"
- A_n l'événement "les n premiers lancers sont des faces"
- A l'événement "le jeu ne s'arrête jamais"
- B_n l'événement "n boules ont été ajoutées dans l'urne et une boule blanche est tirée"
- B l'événement "une boule blanche a été tirée"

1. (a) Exprimer l'événement A_n à l'aide des événements F_n.
   (b) En déduire la valeur de $P(A_n)$ en fonction de n.
2. (a) Exprimer A à l'aide des événements A_n.
   (b) Les événements A_n forment-ils une suite croissante ? décroissante ? Justifier.
   (c) En énonçant précisément le théorème utilisé, calculer $P(A)$.
3. On admet que, dans l'urne, chaque boule a la même probabilité d'être choisie.
   (a) Que vaut $P(B_n|(A_n \cap \overline{F_{n+1}}))$?
   (b) En déduire $P(B_n)$.

(c) En déduire une expression de $P(B)$ sous la forme d'une série. Quelle est la propriété utilisée ?

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Calculer I_0.
   (b) Montrer que $I_n - I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$
   (c) En remarquant que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n - I_{n+1}$ est une série télescopique, terminer le calcul de $P(B)$.

Exercice 6

Dans une population, la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est donnée par la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ p_n = a\frac{2^n}{n!}$$

avec $a > 0$. On suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou un garçon et on introduit les événements :

- E_n : la famille comporte n enfants.
- F : la famille ne comporte que des filles.
- G_1 : la famille comporte un garçon.

1. Déterminer la valeur de a

   Dans la suite, vous êtes autorisé à exprimer vos résultats en fonction de a.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $P(F|E_n)$.
   (b) En remarquant que les E_n forment un système complet d'événements, montrer que $P(F) = \frac{1}{e}$.
   (c) Donner alors la probabilité qu'une famille ait au moins un garçon.
3. On suppose qu'une famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille comporte deux enfants ?
4. Quelle est la probabilité qu'une famille ait n enfants sachant qu'elle n'a que des filles.
5. Quelle est la probabilité qu'une famille ait n enfants sachant qu'elle a exactement 1 garçon.

Exercice 7

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

(a) Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?

(b) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?