Objectifs :

1. redécouvrir la notion de variables aléatoires, de loi, dans le cas dénombrable ;
2. calculer des espérances, des moments, des variances ;
3. connaître les lois géométrique et de Poisson ;
4. gérer des couples de variables aléatoires (indépendance, covariance, corrélation).

Exercice 1

1. On note X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
   Calculer $E(X)$ puis $E\big(X(X-1)\big)$. En déduire $V(X)$.

n zigs ($n \geqslant 2$) jettent une pièce non-truquée. Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de tous les autres.

2. Quelle est la probabilité qu'une partie compte un gagnant ? On notera p cette valeur.
3. On note N la variable aléatoire « nombre de parties nécessaires à l'obtention d'un gagnant ». Trouver la loi de N, son espérance et sa variance.

Exercice 2

Un hacker impénitent réalise ses forfaits au nez et à la barbe du service de cybersécurité de la P.J.. On note θ_n la probabilité qu'il passe au travers des mailles lors de son n-ième méfait ($n \geqslant 1$).
On note N le nombre total de délit(s) avant qu'il n'ait été jeté en prison (variable aléatoire).

1. Exprimer $P(N = n)$ et $\mathbb{E}(N)$ en fonction des nombres θ_n.
2. Reconnaître la loi dans le cas où les coups de filets de la P.J. sont indépendants (les θ_n sont tous égaux). Donner $\mathbb{E}(N)$.
3. On suppose maintenant que les probabilités évoluent au cours du temps... On prend $\theta_n = \frac{n}{n+1}$. Dans ce modèle, est-ce le hacker qui s'améliore ou la police ? Quelle est alors l'espérance du nombre d'infractions ?

Exercice 3

La durée d'un match de foot est divisé en n intervalles. La probabilité qu'un but soit marqué lors d'un intervalle est p. On note X la variable aléatoire du nombre de buts marqués pendant le match.

1. Quelle est l'espérance de X ? On note λ cette espérance.
2. Que vaut $P(X = k)$?
3. On fixe la valeur de λ et on fait tendre p vers 0. Comment varie alors n ?
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to 0} P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Exercice 4

Dans un parc d'attraction, l'attente (en nombre de minutes) devant l'Ignoble Chute À la Mine est une variable aléatoire T_1 qui suit une loi de Poisson de paramètre λ_1. De même, devant l'attraction suivante : T_2 suit une loi de Poisson avec paramètre λ_2.
On suppose les temps d'attente aux deux attractions indépendants.

Déterminer la loi de mon temps d'attente total pour les deux attractions : $S = T_1 + T_2$.
Généraliser aux 18 attractions que j'aurai faites dans ma journée.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$, telles que :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^\star)^2, \quad P\left((X = i) \cap (Y = j)\right) = \frac{a}{2^{i+j}}.$$

1. Calculer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.