Préparation au DS n°5

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$. On suppose que

- X suit une loi de Poisson de paramètre λ
- la loi de Y **sachant** $X = n$ est binomiale de paramètre (n, p)

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). Montrer ensuite que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera les paramètres.

   La formule des probabilités conditionnelles permet d'écrire
   $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = n \text{ et } Y = k) &= P(X = n) \times P_{X=n}(Y = k)\\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$
   L'évènement $Y = k$ est la réunion disjointe des évènements $(Y = k \text{ et} X = n)$ pour tous les $n \geqslant k$. D'où
   $$\begin{aligned}P(Y = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n \text{ et } Y = k)\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+n-k}}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= e^{-\lambda}\frac{p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$
   En faisant un changement d'indice $n' = n - k$, on reconnaît le développement en série de $e^{(1-p)\lambda}$. Ainsi
   $$P(Y = k) = e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}.$$
   On reconnaît une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

2. Le nombre d'oeufs pondus par une poule durant une année suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 250$. Lorsque qu'un oeuf est pondu, il a une probabilité de $3/4$ d'arriver à éclosion. Quelle est la probabilité que k oeufs arrivent à éclosion durant l'année ?

   On est exactement dans la situation de la question précédente : X est le nombre d'œufs pondus cette année et Y le nombre d'œufs éclos. Alors le nombre d'œufs éclos est un entier positif ou nul qui vérifie
   $$P(Y = k) = e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!} = e^{-187.5}\frac{(187.5)^k}{k!}.$$

3. Dans un magasin, le nombre de clients journaliers suit une loi de Poisson de paramètre λ. Le magasin comprend n caisses, et en sortant, chaque client choisit l'une de ces caisses de façon équiprobable. Un jour donné, la caisse 1 a vu passer m clients. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu $m.n$ clients ce même jour ?

On est encore dans cette situation avec ici $p = \frac{1}{n}$, X : nombre de clients ce jour-là et Y : le nombre de clients à la caisse n° 1.
On nous demande de calculer $P_{Y=m}(X = mn)$:

$$\begin{aligned} P_{Y=m}(X = mn) &= \frac{P(X = mn \text{ et } Y = m)}{P(Y = m)} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{mn}}{(mn)!} \times \binom{mn}{m}\left(\frac{1}{n}\right)^m\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mn-m}}{e^{-\frac{\lambda}{n}}\frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m}{m!}} \\ &= \exp\left(-\frac{n-1}{n}\lambda\right)\lambda^{m(n-1)} \cdot \frac{\frac{1}{(mn)!} \cdot \frac{(mn)!}{m!(m(n-1))!}}{\frac{1}{m!}} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m(n-1)} \\ &= \exp\left(-\frac{n-1}{n}\lambda\right)\frac{\left(\frac{n-1}{n}\lambda\right)^{m(n-1)}}{(m(n-1))!}. \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques dont les espérances sont respectivement p et q. C'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \text{ et } P(Y = k) = q(1-q)^{k-1}$$

On note également les matrices aléatoires suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

1. (a) Retrouver, par le calcul, les expressions de l'espérance et de la variance de X. Donner de même $E(Y)$ et $V(Y)$.

   Voir le cours.

   (b) Calculer l'espérance du déterminant de la matrice A.

   $E(\text{dét } A) = E(X - Y) = E(X) - E(Y)$ (puisque l'espérance est linéaire).

   (c) Calculer la variance du déterminant de la matrice A.

   $\text{Var}(\text{dét } A) = \text{Var}(X - Y)$ et d'après le cours, $\text{Var}(X-Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2.\text{Cov}(X, Y)$. Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = k, Y = k)$.

   Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, $P(X = k, Y = k) = P(X = k)P(Y = k) = pq(1 + pq - p - q)^{k-1}$.

   (b) Exprimer l'événement $(X = Y)$ à l'aide de la famille d'événement $((X = k, Y = k))_{k\in\mathbb{N}^*}$. et calculer ensuite $P(X = Y)$.

   $(X = Y) = \bigcup_{k=1}^{+\infty}(X = k, Y = k)$ est puisque les événements de la famille $((X = k, Y = k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles 2 à 2,

   $$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k) = \frac{pq}{p + q - pq}.$$

(c) A quelle condition sur X et Y la matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.

X est Y sont valeurs propres de B. Si $X \neq Y$ alors la matrice B est une matrice d'ordre 2 admettant deux valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable.
Si $X = Y$, le sous-espace propre associé à la valeur propre double X est de dimension 1 et par conséquent, B n'est pas diagonalisable.
En conclusion :

$$B \text{ diagonalisable} \iff X \neq Y$$

(d) Donner alors la probabilité que la matrice B soit diagonalisable.

$P(\text{"B diagonalisable"}) = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = \frac{p+q-2pq}{p+q-pq}$

3. (a) Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $P(Y > k) = (1-q)^k$.

$(Y > k) = \bigcup_{n=k+1}^{+\infty} (Y = k)$. La famille $(Y = n)_{n \geqslant k+1}$ étant formée d'événements incompatibles 2 à 2,

$$\begin{aligned} P(Y > k) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} P(Y = n) \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} q(1-q)^{n-1} \\ &= q\frac{(1-q)^k}{1-(1-q)} = (1-q)^k \end{aligned}$$

(b) En utilisant l'indépendance de X et de Y, donner alors $P(Y > k, X = k)$.

$P(Y > k, X = k) = P(Y > k)P(X = k) = pq(1-q)^k(1-p)^{k-1}$.

(c) Ecrire $P(X < Y)$ en fonction des probabilités $P(Y > k, X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

$P(X < Y) = P(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (Y > k, X = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(Y > k, X = k)$ par incompatibilité des événements.

(d) Terminer alors le calcul et montrer que $P(X < Y) = \frac{\alpha}{p+q-pq}$ (avec α à déterminer en fonction de p et q).

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq(1-q)^k(1-p)^{k-1} \\ &= pq\sum_{k=0}^{+\infty} [(1-q)(1-p)^k \\ &= \frac{pq(1-q)}{p+p-pq} \end{aligned}$$

(e) Quelle est la probabilité que le déterminant de A soit positif ?

$P(\text{dét } A \geqslant 0) = P(X - Y \geqslant 0) = P(X \geqslant Y) = 1 - P(X < Y) = 1 - \frac{pq(1-q)}{p+p-pq}$