Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire le calcul de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Diagonaliser et calculer la puissance n-ème de $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}v_n \\ v_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{5}{6}v_n \end{cases}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

   (a) Définir la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$

   (b) Déterminer χ_A le polynôme caractéristique de A et déterminer sa racine double λ_0.

   (c) En déduire que A n'est pas diagonalisable.

   (d) Déterminer E_{λ_0}, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_0.

   (e) Trouver alors une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A a pour matrice

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

   Définir alors P, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$. Que peut-on dire de A et T ?

2. Calcul de A^n

   (a) Donner D et N dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $T = D+N$, avec D diagonale et N nilpotente.

   (b) En justifiant, calculer alors T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Expression de u_n et v_n en fonction de n

   (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$

   (b) En déduire u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle

$$y^{(4)} = y \quad (E)$$

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^\infty$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y^{(3)}(t) \\ y''(t) \\ y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'on a y solution de (E) si et seulement si $t \to Y(t)$ est solution d'un système différentiel

$$Y' = AY \quad (S_1)$$

   où A est une matrice carrée d'ordre n à préciser.

2. Calculer le polynôme caractéristique de A, noté χ_A.

3. Déterminer les valeurs propres réelles $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ ainsi que des vecteurs propres de A de la forme $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$ associés respectivement à λ_1 et λ_2.

   La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?

4. On pose $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$. On pose également $M = P^{-1}AP$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = P^{-1}Y$, et $Z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = P^{-1}Y'$ où z_1, z_2, z_3, z_4 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   (a) Calculer $A\varepsilon_3$ et $A\varepsilon_4$. En déduire les coefficients de M.
   (b) Déterminer un système différentiel (S_2) liant Z et Z'.
   (c) On rappelle que l'équation $v'' + v = 0$ a pour solution
   $$\mathcal{S} = \{\alpha \cos t + \beta \sin t \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$
   Résoudre le système (S_2).
   (d) En déduire les solutions de (S_1).

Exercice 5

Soit deux nombres réels a et b strictement positifs ainsi que les matrices :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Soit $\mathcal{E} = \{\alpha K + \beta I \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Montrer que la matrice K admet trois valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ que l'on exprimera éventuellement en fonction de a et b.
3. La matrice K est-elle diagonalisable ?
4. (a) Déterminer le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre λ_1. Donner u_1 le vecteur propre de E_1 dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.
   (b) Déterminer le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre λ_2. Donner u_2 le vecteur propre de E_2 dont la deuxième composante vaut 1.
   (c) Déterminer le sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre λ_3. Donner u_3 le vecteur propre de E_3 dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.
5. Donner une relation entre K, une matrice P inversible et une matrice diagonale D que l'on précisera. Justifier cette relation en introduisant un endomorphisme u canoniquement associé à la matrice K.
6. Pour i valant 1 ou 2 ou 3, montrer que les vecteurs propres u_i de K sont aussi vecteurs propres de la matrice $M = \alpha K + \beta I$ associés aux valeurs propres μ_i que l'on exprimera en fonction de α, β et λ_i.
7. (a) Montrer que toute matrice $M = \alpha K + \beta I$ est diagonalisable et donner une matrice diagonale Δ semblable à M.
   (b) Donner une relation entre M et Δ.
8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser ce qui précède pour calculer A^n.