Exercice 1

Déterminer les rayons de convergence de la série entière $\sum_{n>0} a_n x^n$ pour : $a_n = 1$, $a_n = n$, $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$.
Faire l'étude aux extrémités de l'intervalle de convergence.

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes : $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$; $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$; $\sum \alpha^n z^n$; $\sum (5 + (-1)^n)^n z^n$; $\sum \frac{\operatorname{sh} n}{n(n+1)} z^n$

Exercice 3

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n (n+3)! z^n \;;\quad \sum_{n\geqslant 0} n^n\, z^n \;;\quad \sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\frac{1}{n}\right) z^n \;;\quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1} \;;$$

$$\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2} z^n \;;\quad \sum_{n\geqslant 0} (1+i)^n z^n \;;\quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n \;;\quad \sum_{n\geqslant 0} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n \;;$$

Exercice 4

On étudie la série entière suivante : $\sum_{n\geqslant 0} z^{n!}$, c'est-à-dire de la forme $\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ avec $a_k = 1$ s'il existe n tel que $k = n!$ et $a_k = 0$ sinon. On note R son rayon de convergence.

- Majorer a_n. Que peut-on en déduire sur R ?
- Déterminer la nature de la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k$ (cas $z = 1$) ?
- En déduire la valeur de R.

Exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \sin\left[(2 - \sqrt{3})^n \pi\right]$
   (a) Montrer qu'elle est à termes positifs.
   (b) Montrer qu'elle converge.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$; montrer que A_n est entier.
3. En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \sin\left[(2 + \sqrt{3})^n \pi\right]$.
4. Quel est le rayon de convergence de la série de terme général $u_n x^n$?

Exercice 6

1. Donner le DSE de $\int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Préciser les théorèmes utilisés et le rayon de convergence.
2. Ecrire $\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$ sous la forme d'une série alternée et en donner une valeur approchée à 10^{-4}.

Exercice 7

Donner le DSE des fonctions suivantes : e^{5x+1} ; $\frac{x^2+2}{x-3}$; $\ln(x^2 - 1)$.

Exercice 8

Calculer la somme des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$

Exercice 9

On note $S(t)$ la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) t^n$ lorsque celle-ci converge. Donner l'ensemble de définition de S et exprimer S à l'aide de fonctions usuelles. Même question pour : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n}{(2n+1)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!}$.

Exercice 10

Le but de l'exercice est de déterminer est d'obtenir une expression explicite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 0\,,\; a_{n+1} = 2a_n + 2^n$$

On introduit pour cela la série entière $\sum_{n\in\mathbb{R}} a_n z^n$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sa somme et R son rayon de convergence.

1. Montrer que pour tout z appartenant au disque ouvert de convergence, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} z^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \frac{1}{1-2z}$$
2. En déduire que
$$f(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{z}{(1-2z)^2}$$
3. Effectuer alors un développement en série entière de f et en déduire la valeur des coefficients a_n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{R}} a_n z^n$?

Exercice 11

1. Montrer que $f(x) = (\arcsin(x))^2$ est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' = 2$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
2. En déterminant une solution développable en séries entières de l'équation précédente, montrer que

$$(\arcsin(x))^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}$$

Exercice 12

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad t(t-1)y'' + 3y' - 6y = 0$$

1. On pose $Q(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2}$.
   (a) Vérifier que la fonction $Q(t)$ est solution de (E).
   (b) Rappeler le développement en série entière de $\frac{1}{1-t}$. Préciser le rayon de convergence de cette série. En déduire le développement en série entière de $\frac{1}{(1-t)^2}$
2. On cherche maintenant des polynômes solutions de (E) sous la forme $y(t) = a_m t^m + \cdots + a_0$.
   (a) Déterminer le degré de ces polynômes puis déterminer tous les polynômes solutions de (E).
   (b) Préciser le polynôme P solution de (E) vérifiant $P(0) = 1$.
3. On cherche les solutions de (E) développables en série entière : $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$.
   (a) Pour tout entier naturel k, écrire, selon les valeurs de k, les relations entre a_k et a_{k+1}.
   (b) En déduire que pour tout entier $k \neq 3$, on a $a_{k+1} = \frac{k+2}{k+1} a_k$.
   (c) Calculer $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$. En déduire le rayon de convergence R de la série.
4. (a) Connaissant a_0, quels sont les coefficients de la série que l'on peut déterminer ?
   (b) On pose $a_0 = 1$ et $a_4 = 5$. Exprimer la solution à l'aide de fonctions usuelles.
   (c) Déterminer a_0 et a_4 pour retrouver la fonction P parmi ces solutions.

Exercice 13

Soit F la fonction qui, à tout réel positif x, associe : $\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$.

1. Étudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{(-1)^n \, 4^n n!}{(2n+1)!}$$

2. (a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que la fonction F est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$y'(x) = -2\,x\,y(x) + 1 \qquad (\mathcal{E})$$

3. (a) En recherchant le développement en série entière de F sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donner une relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n \geqslant 0$.
   (b) Pour tout entier naturel p, montrer que $a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}$
   (c) Pour tout entier naturel p, calculer a_{2p}.
   (d) En déduire le développement en série entière de F.
4. (a) Donner les développement en série entières des fonctions suivantes et préciser les rayons de convergence :
      i. $x \mapsto e^x$
      ii. $x \mapsto e^{x^2}$ (on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ce développement)
      iii. $x \mapsto e^{-x^2}$
      iv. $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$ (on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ ce développement)
   (b) Effectuer le produit de Cauchy des séries $\sum_{n \geqslant 0} b_n x^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} c_n x^n$. On notera $\sum_{n \geqslant 0} d_n x^n$ ce résultat et on exprimera d_n.
   (c) Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$