Devoir non-surveillé n°6

Dans ce devoir, nous abordons à travers deux situations différentes et avec deux approches différentes, le problème d'une suite de nombres définie par récurrence.

Exercice 1

Soit x un scalaire tel que $x^2 \neq 1$. On pose

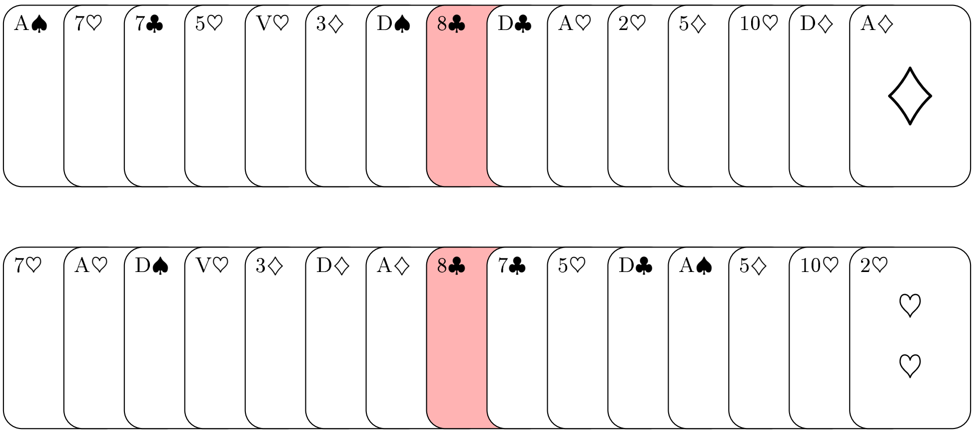
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Delta_0 = 1.$$

1. (re)trouver que $\forall n \geqslant 2$, $\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2}$.
2. Posons $X_n = \begin{pmatrix} \Delta_{n-1} \\ \Delta_n \end{pmatrix}$. Déterminer M : matrice 2×2 vérifiant $X_n = MX_{n-1}$.
3. Calculer $\text{dét}(\lambda I_2 - M)$ et en déduire les possibles valeurs propres de M.
4. Déterminer des vecteurs propres correspondants : u et v.
5. Quel lien y a-t-il entre M, la matrice de passage $P = \text{Mat}(u, v)$ et une certaine matrice diagonale D que vous préciserez ?
6. Calculer M^n et en déduire une expression de Δ_n.

Exercice 2

Mathématiques, magie et arnaques…
Au détour d'une rue, un magicien vous propose de miser sur le jeu suivant :

> « J'étale devant vous un premier paquet de 52 cartes, faces visibles.
> Je vais maintenant en étaler un second paquet, en dessous du premier.
> Êtes-vous d'accord de parier contre moi si j'affirme qu'au moins une carte du deuxième paquet se retrouvera en face de son homologue dans le premier ? »



$n = 52$ est un entier fixé dans tout le problème.
On numérote les cartes du paquet du haut avec un nombre de 1 à n (dans l'ordre de l'étalement) et on reporte ces nombres sur les cartes correspondantes dans le paquet du bas. Cela permet de décrire l'expérience.
Ainsi, l'évènement élémentaire $\omega = (3, 46, 25, 30, 5, \dots)$ signifie que la première carte du deuxième paquet est en troisième position dans le premier paquet ; la cinquième carte est à la même place.

On dira qu'on a fait un « mélange » et que le mélange comporte « k cartes fixes » si *exactement* k cartes du premier paquet ont la même place dans le deuxième. Enfin, un « dérangement » est un mélange qui n'a pas de carte fixe.

Nous allons calculer la probabilité qu'un mélange soit un dérangement. On note d_n le nombre de dérangements ($d_0 = 1$).

1. (a) Combien y a-t-il de mélanges ?
   On les suppose désormais équiprobables.
   (b) Pour $n = 2$, puis $n = 3$, combien y a-t-il de dérangements ?
2. En regroupant ces mélanges selon leur nombre de cartes fixes, établir que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.
   Utiliser cette formule pour trouver d_4 puis d_5.

On pose désormais $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n$.

3. Pourquoi a-t-on $d_n \leqslant n!$? En déduire que le rayon de convergence de f est non-nul.
4. En utilisant un produit de Cauchy, établir que $e^z \times f(z) = \frac{1}{1-z}$.
5. En déduire le DSE de $f(z)$ puis une expression de d_n.

Épilogue : ainsi, la probabilité recherchée est de $\displaystyle \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{52} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{52 \to +\infty}{\sim} e^{-1} \approx 37\%.$