A. Entraînement

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \cos(e^{-n})$ **b)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n \ln(n+2)}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1000^n}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\ln(n+2)}_{n\geqslant 0}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{(2n)!}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-3)^n+1}{2^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3+n}$ **h)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2^n+3}$ **i)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n \operatorname{th} n}$

a) Grossièrement divergente.

b) En valeur absolue, on a $\left|\frac{\cos n}{2^n \ln(n+2)}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$ donc la série est absolument convergente donc convergente.

c) C'est une série exponentielle dont la somme est e^{1000}. Pour montrer la convergence, le critère de D'Alembert convient.

d) C'est une série qui répond au critère des séries alternées (donc converge) alors qu'elle n'est pas absoluement convergente puisque $\frac{1}{\ln(n+2)} > \frac{1}{n}$ (elle est semi-convergente).

e) Converge par D'Alembert.

f) Somme de deux séries géométriques dont une converge et l'autre diverge. La façon la plus simple de montrer la divergence est de dire que le terme général ne tend pas vers 0 (grossièrement divergente).

g) Série à terme positifs pour qui $\frac{1}{n^3+n} < \frac{1}{n^3}$. Comme les séries de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ convergent dès que $\alpha > 1$, on en déduit la convergence de la série. Le critère des équivalents (avec Riemann) fonctionne aussi, mais celui de D'Alembert et Cauchy : non.

h) Série absolument convergente d'après la précédente. Le critère des séries alternées fonctionne aussi.

i) Converge d'après le critère des séries alternées. On peut aussi voir qu'elle est absolument convergente puisque la valeur absolue du terme général est équivalente à $\frac{1}{2^n}$.

j) Grossièrement divergente.

k) Converge d'après le critère des séries alternées.

l) C'est une série à termes positifs : utilisons le critère des équivalents. Le terme général est équivalent à $\frac{1}{n}$ dont la série diverge. Cette série diverge donc.

Exercice 2

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes et leurs sommes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **b)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 5^{-n} 2\sqrt{2}^n$

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{1-n}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2+2^{n-1}}{3^{n+2}}$ **h)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!}$ **i)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 1-\frac{e^{-n}}{n!}$

a) Apercevant que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$, on voit que la série est télescopique : sa somme partielle de rang N est $\ln(N+1)$ et tend donc vers $+\infty$.
Selon l'avancement : on peut aussi utiliser un équivalent : le terme général de la série est équivalent à celui de la série harmonique, comme la série harmonique diverge, la série a) diverge.

b) Série harmonique divergente (vers $+\infty$).

c) Série géométrique, sa raison $\frac{\sqrt{2}}{5}$ étant strictement entre -1 et 1, elle converge. Sa somme est

$$\sum_0^\infty a \cdot q^n \underset{|q|<1}{=} \frac{a}{1-q} \quad \text{ici} \quad = \frac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{5}} = \frac{10}{5-\sqrt{2}} \approx 2.79.$$

d) Le terme général tend vers 1, elle diverge grossièrement (vers $+\infty$ car tous les termes sont positifs).

e) Série géométrique de raison $\frac{1}{e}$ strictement comprise entre -1 et 1, elle converge. Sa somme est $\frac{e}{1-e^{-1}} = \frac{e^2}{e-1} \approx 4.30$.

f) Le terme général tend vers e, la série diverge grossièrement (vers $+\infty$).

g) Somme de deux séries géométriques convergentes donc converge. Sa somme est $\frac{2/9}{1-3} + \frac{1/18}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{18}$.

h) On pourrait utiliser la série exponentielle en voyant que $\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$ (et en faisant attention au terme de rang $n=0$ pour qui cette expression est fausse). Plus simplement, cette écriture montre que la série est télescopique. On trouve que la somme partielle de rang N vaut $0 - \frac{1}{N!}$ qui tend vers 0 (ce qui paraître étonnant vu que tous les termes, sauf le premier, sont positifs).

i) Le terme général tend vers 1, elle diverge grossièrement (vers $+\infty$).

Exercice 3

Étude d'une suite *via* l'étude d'une série.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+nu_n}$.

1. Montrer que cette suite est positive.
2. Étudier la suite $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Considérer les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ pour trouver une expression de u_n en fonction de n.
4. Déduisez-en un équivalent de u_n.

1. C'est vrai pour u_0 et si c'est vrai au rang n, alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+nu_n}$ est clairement positif. Par récurrence, c'est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1+nu_n}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = n$. C'est une suite arithmétique de raison 1 tendant de façon croissante vers $+\infty$.
3. On a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

   D'autre part, par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}$.

   On en déduit que
   $$u_n = \frac{1}{\frac{1}{u_0} + \frac{n(n-1)}{2}}$$
4. On voit ainsi que u_n est équivalent à $\dfrac{2}{n^2}$.

Exercice 4

On considère la série $\sum_{n>0} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

1. Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en $x=0$.
2. En déduire une décomposition de $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ sous la forme

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{a_n}{\sqrt{n}} + \frac{b_n}{n} + \frac{c_n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

3. Justifier que $o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est le terme général d'une série convergente.
4. On rappelle que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. En déduire la nature de la série $\sum_{n>0} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

B. Problèmes

Exercice 5

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ et on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sa somme partielle au rang n. On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = S_n - \ln n$.

1. (a) Donner un encadrement de $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$.
   (b) En déduire que :
      i. la suite (U_n) est décroissante.
      ii. $\frac{1}{n} \leqslant S_n - \ln n$.
   (c) Justifier alors la convergence de la suite (U_n). On notera γ sa limite. Elle est appelée constante d'Euler.
   (d) Montrer que $S_n \sim \ln n$
2. On pose maintenant $V_n = S_n - \ln n - \gamma$.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(V_n - V_{n+1})$ converge.
   (b) Donner un encadrement de $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$ par deux intégrales.
   (c) En déduire que $\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}$ puis que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.
   (d) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(V_k - V_{k+1}) = V_{n+1}$.
   (e) Montrer que $V_n - V_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$
   (f) On admet que si deux séries à termes positifs ont des termes généraux équivalents et convergent alors leurs restes sont équivalents. Montrer que $V_n \sim \frac{1}{2n}$.

Exercice 6

On étudie la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

1. Comparer la série à une intégrale et en déduire qu'elle converge.
   On appelle ζ_2 sa somme.

> On rappelle le critère :
> Si u_n peut s'écrire $f(n)$ où f est une fonction décroissante, alors
> $$\int_p^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{q} u_k \leqslant \int_{p-1}^{q} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
> En particulier, si l'intégrale converge (quand $q \longrightarrow +\infty$), alors la série converge aussi ; et si l'intégrale diverge, la série aussi.
> Ici $\int_{p-1}^{q} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{q} + \frac{1}{p-1}$ converge quand q tend vers $+\infty$ ce qui prouve la convergence de la série.

2. Encadrer le reste : $R_N := \displaystyle\sum_{n>N} \frac{1}{n^2}$ par deux intégrales que l'on évaluera.

> $$\int_{N+1}^{q+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=N+1}^{q} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_N^q \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$
> $$\frac{1}{N+1} - \frac{1}{q+1} \leqslant \sum_{k=N+1}^{q} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{N} - \frac{1}{q}$$
> Lorsque $q \longrightarrow +\infty$, on trouve que $\dfrac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \dfrac{1}{N}$. On peut même dire que $R_N \sim \frac{1}{N}$ (*Cf.* suite du problème).

3. En déduire le nombre de termes qu'il faut calculer pour connaître ζ_2 avec 3 chiffres après la virgule.

Il faut bien comprendre que R_N représente à la fois le reste de la série ET l'erreur si l'on approxime la somme totale par la somme partielle de rang N :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} - \sum_1^N \frac{1}{n^2} = \sum_{N+1}^\infty \frac{1}{n^2} = R_N.$$

Pour que l'erreur soit inférieure à une tolérance donnée : $|R_N| \leqslant \varepsilon$, il SUFFIT que $\frac{1}{N}$ soit inférieur à ε... On CHOISIT donc d'imposer la condition $\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire (pour $\varepsilon = 10^{-3}$) $N \geqslant 10^3$.
Petite remarque sur la notion de « nombre de chiffres exacts » : c'est un problème compliqué : si on montre que

$$1.9999 \leqslant \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k} \leqslant 2.0001,$$

(ce qui est vrai) on ne peut pas en déduire les chiffres du développement décimal de $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k}$ (aura-t-on plein de 9 ou plein de 0 ?).
Ce qui nous intéresse dans ce genre de situation, c'est un encadrement.

Suite à la question 2, on a envie de construire deux *suites* :

$$S_N := \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N} \qquad \text{et} \qquad \sigma_N := \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N+1};$$

et le fait que $R_N \sim \frac{1}{N}$ nous conforte dans l'impression que S_N doit être une meilleure approximation de ζ_2 que la somme partielle de rang N.

4. Montrer que (S_N) et (σ_N) sont adjacentes.

$S_{N+1} - S_N = \frac{-1}{N(N+1)^2} < 0$ et $\sigma_{N+1} - \sigma_N = \frac{1}{(N+1)^2(N+2)} > 0$; or il est clair que $S_N - \sigma_N$ tend vers 0.
En fait, en reprenant le schéma de la démonstration du critère des intégrales, on voit que
- S_N correspond à l'aire des rectangles de 1 à N + l'aire de la queue de $f(t)$ (fonction qui majore),
- tandis que σ_N correspond à l'aire des rectangles de 1 à N + l'aire de la queue de $f(t+1)$ (fonction qui minore).

Lorsque l'on remplace N par $N+1$, on remplace l'encadrement du reste R_N par les deux intégrales par son encadrement de rang $N+1$ et la partie l'intégrale sur $[N, N+1]$ est remplacée par la valeur exacte $\frac{1}{(N+1)^2}$.
Cela mériterait un schéma, mais on comprend graphiquement que (S_N) est décroissante et σ_n croissante.

5. Montrer que l'erreur $|\zeta_2 - S_N|$ est maintenant majorée par $\frac{1}{N(N+1)}$.

Comme $\zeta_2 - S_N = R_N - \frac{1}{N}$ et comme on avait

$$\begin{aligned} \frac{1}{N+1} &\leqslant R_N \leqslant \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N} &\leqslant R_N - \tfrac{1}{N} \leqslant 0 \\ &\left|R_N - \tfrac{1}{N}\right| \leqslant \frac{1}{N(N+1)} \end{aligned}$$

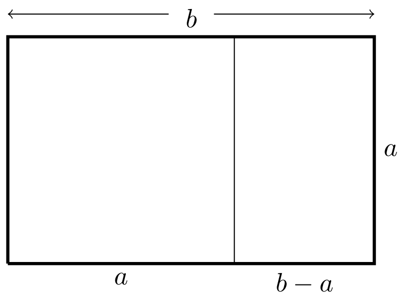
6. Combien allez-vous calculer de termes pour connaître ζ_2 avec une précision de 3 chiffres après la virgule ? (Vous vérifierez que $\zeta_2 \approx \frac{\pi^2}{6}$...)

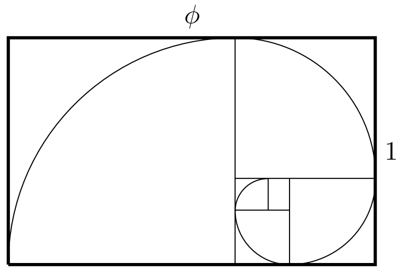
On IMPOSE $\frac{1}{N(N+1)} \leqslant 10^{-3}$, voire même $\frac{1}{N^2} \leqslant 10^{-3}$ (ce qui suffit pour s'assurer que $|R_N| \leqslant 10^{-3}$). Autrement dit, on calculera au moins 32 termes ($\sqrt{10^3} \approx 31.62$).

Exercice 7

On souhaite disposer de feuilles ayant la particularité suivante :
a) lorsqu'on retranche un carré (de taille maximale), il reste une feuille ayant les mêmes proportions longueur/largeur.

1. Calculer ϕ : le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ d'une telle feuille, aussi appelé nombre d'or.





`b)` Dans le carré ainsi obtenu, on trace un arc de cercle, puis dans la bande restante, on recommence le procédé (`goto a)`) et appelons **spirale d'or** la courbe ainsi obtenue (figure de droite).

2. Calculer sa longueur pour un nombre n d'itérations.
3. La spirale complète a-t-elle une longueur finie ?

La série de Fibonacci serait partout…