A. Entraînement

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\cos(e^{-n})$ **b)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n\ln(n+2)}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1000^n}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{\ln(n+2)}_{n\geqslant 0}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!}{(2n)!}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-3)^n+1}{2^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3+n}$ **h)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2^n+3}$ **i)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\,\mathrm{th}\,n}$

Exercice 2

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes et leurs sommes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ **b)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}5^{-n}2\sqrt{2}^n$

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}e^{1-n}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2+2^{n-1}}{3^{n+2}}$ **h)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n-1}{n!}$ **i)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}1-\frac{e^{-n}}{n!}$

Exercice 3

Étude d'une suite *via* l'étude d'une série.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+nu_n}$.

1. Montrer que cette suite est positive.
2. Étudier la suite $\left(\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Considérer les sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}\right)$ pour trouver une expression de u_n en fonction de n.
4. Déduisez-en un équivalent de u_n.

Exercice 4

On considère la série $\sum_{n>0}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

1. Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en $x=0$.
2. En déduire une décomposition de $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ sous la forme
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\frac{a_n}{\sqrt{n}}+\frac{b_n}{n}+\frac{c_n}{n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$
3. Justifier que $o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est le terme général d'une série convergente.
4. On rappelle que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. En déduire la nature de la série $\sum_{n>0}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

B. Problèmes

Exercice 5

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ et on note $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ sa somme partielle au rang n. On pose également pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n=S_n-\ln n$.

1. (a) Donner un encadrement de $\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}$.
   (b) En déduire que :
      i. la suite (U_n) est décroissante.
      ii. $\frac{1}{n}\leqslant S_n-\ln n$.
   (c) Justifier alors la convergence de la suite (U_n). On notera γ sa limite. Elle est appelée constante d'Euler.
   (d) Montrer que $S_n\sim\ln n$
2. On pose maintenant $V_n=S_n-\ln n-\gamma$.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(V_n-V_{n+1})$ converge.
   (b) Donner un encadrement de $\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2}$ par deux intégrales.
   (c) En déduire que $\frac{1}{n+1}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{n}$ puis que $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sim\frac{1}{n}$.
   (d) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(V_k-V_{k+1})=V_{n+1}$.
   (e) Montrer que $V_n-V_{n+1}\sim\frac{1}{2n^2}$
   (f) On admet que si deux séries à termes positifs ont des termes généraux équivalents et convergent alors leurs restes sont équivalents. Montrer que $V_n\sim\frac{1}{2n}$.

Exercice 6

On étudie la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

1. Comparer la série à une intégrale et en déduire qu'elle converge.
   On appelle ζ_2 sa somme.
2. Encadrer le reste : $R_N:=\displaystyle\sum_{n>N}\frac{1}{n^2}$ par deux intégrales que l'on évaluera.
3. En déduire le nombre de termes qu'il faut calculer pour connaître ζ_2 avec 3 chiffres après la virgule.

Suite à la question 2, on a envie de construire deux *suites* :

$$S_N:=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{N}\qquad\text{et}\qquad\sigma_N:=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{N+1};$$

et le fait que $R_N\sim\frac{1}{N}$ nous conforte dans l'impression que S_N doit être une meilleure approximation de ζ_2 que la somme partielle de rang N.

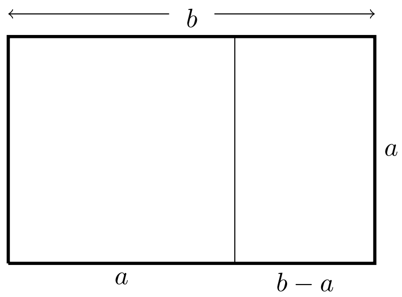
4. Montrer que (S_N) et (σ_N) sont adjacentes.
5. Montrer que l'erreur $|\zeta_2-S_N|$ est maintenant majorée par $\frac{1}{N(N+1)}$.
6. Combien allez-vous calculer de termes pour connaître ζ_2 avec une précision de 3 chiffres après la virgule ? (Vous vérifierez que $\zeta_2\approx\frac{\pi^2}{6}\ldots$)

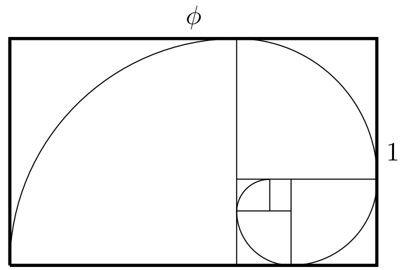
Exercice 7

On souhaite disposer de feuilles ayant la particularité suivante :

`a)` lorsqu'on retranche un carré (de taille maximale), il reste une feuille ayant les mêmes proportions longueur/largeur.

1. Calculer ϕ : le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ d'une telle feuille, aussi appelé nombre d'or.





`b)` Dans le carré ainsi obtenu, on trace un arc de cercle, puis dans la bande restante, on recommence le procédé (`goto a)`) et appelons **spirale d'or** la courbe ainsi obtenue (figure de droite).

2. Calculer sa longueur pour un nombre n d'itérations.
3. La spirale complète a-t-elle une longueur finie ?

La série de Fibonacci serait partout...