Prérequis : Les grands types de séries sont les géométriques, télescopiques, séries de Riemann, séries à termes positifs, séries alternées. Il convient de les repérer et connaître les théorèmes les concernant.

Objectifs :

1. déterminer la nature convergente ou divergente d'une série ;
2. encadrer des sommes (partielles), des restes ;
3. calculer certaines sommes de séries.

Exercice 1

En utilisant la règle de d'Alembert, déterminer la nature des séries suivantes :

$$\textbf{a)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n}{n^3} \qquad \textbf{b)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!} \qquad \textbf{c)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{(3n)!} \qquad \textbf{d)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\binom{5n}{2n}}.$$

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ U_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-U_n} \end{cases}$$

On pose également $V_n = \frac{U_n}{n}$ et $T_n = \frac{1}{n} - U_{n+1}$.

1. Montrer que U_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner un encadrement simple de U_{n+1} et en déduire que $U_n \to 0$.
3. Montrer que $U_n \sim \frac{1}{n}$. Que peut-on alors dire de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$?
4. Donner un équivalent simple de V_n. Que peut-on alors dire de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} V_n$?
5. Donner un développement limité à l'ordre 1 de e^x en 0. En déduire un développement de T_n, puis un équivalent simple. Que peut-on alors dire de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} T_n$?

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+^*$ continue et décroissante. Montrer que pour tout entier $k > 1$:

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

2. Dans cette question, on suppose que $\forall t \in \mathbb{R}_+\,,\ f(t) = \frac{1}{t^2}$.
   (a) Justifier alors la convergence de la série $\sum_{n>1} f(n)$.
   On note désormais $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$, $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ *et* $R_n = S - S_n$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $N > n$, donner un encadrement de $\sum_{k=n+1}^{N} f(k)$ par deux intégrales.
   (c) En déduire une majoration du reste R_n de cette série.
   (d) Monter que $\left|S - \left(S_n + \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$.
   (e) À quel rang faut-il calculer S_n afin d'obtenir un encadrement de S de largeur 10^{-2} ?
   À quel rang faut-il calculer $S_n + \frac{1}{n}$ pour avoir le même résultat ?
3. Dans cette question, on suppose que $\forall t \in \mathbb{R}_+\,,\ f(t) = \frac{1}{t}$. On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$$

   (a) Que dire cette fois de la nature de la série $\sum_{n>1} f(n)$?
   (b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (c) Justifier la convergence de la suite (u_n). On notera γ sa limite.
   (d) À quel rang faut-il calculer u_n pour obtenir une valeur approchée de γ à 10^{-2} près ?
   Indication : à la calculatrice : $1/(e^{0.01} - 1) = 99.500833332$.

Exercice 4

Somme de la série harmonique alternée Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer I_0. Déterminer $I_n + I_{n+1}$ et en déduire une autre expression de I_0.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

Permutation des termes de la somme Amusons-nous à changer l'ordre des termes de la précédente somme afin d'avoir deux termes positifs suivi d'un négatif : posons

$$\begin{aligned} S_N &= 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4} \quad +\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\dots \\ &= \sum_{n=0}^{N}\underbrace{\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}}_{u_n} \end{aligned}$$

4. Montrer que le terme général u_n est toujours positif.
5. Montrer que cette série converge.
6. Calculer quelques termes de cette somme et comparer à $\ln(2)$.
7. Que se passe-t-il si on veut réarranger la somme de sorte à prendre tous les termes négatifs puis tous les positifs ?