A. Théorie

■ DÉF : si (x_n) est une suite qui converge vers ℓ, son **coefficient de convergence** est :

$$\kappa = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \ell|}{|x_n - \ell|}.$$

... si toutefois cette limite a un sens (dénominateur définitivement non-nul à partir d'un certain rang) et existe.

- Si $\kappa = 1$, on dit que (x_n) converge **lentement**,
- si $0 < \kappa < 1$, on dit qu'elle converge **géométriquement**,
- si $\kappa = 0$, la convergence est qualifiée de **rapide**.

Voici quelques exemples de types de convergence :

lente		géométrique			rapide	
suite	limite	suite	limite	κ	suite	limite
$\left(\frac{5n+4}{n+4}\right)$	5	$\left(2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$	π	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{n^{100}}{n!}\right)$	0
$\left(\frac{1}{\ln n}\right)$	0	$\left(\frac{n!}{n^n}\right)$	0	e^{-1}	$\left(\frac{100^n}{n!}\right)$	0

On dira que $\widehat{\kappa}_n = \frac{|x_{n+1}-\ell|}{|x_n-\ell|}$ est un **estimateur** de la vitesse de convergence.
Attention, le calcul de $\widehat{\kappa}_n$ peut poser des problèmes...

- pour des raisons mathématiques : si la suite $(\widehat{\kappa}_n)$ ne converge pas ou si le dénominateur s'annule régulièrement,
- ou pour des raisons numériques (c'est-à-dire liées à l'informatique) : lorsque x_n est vraiment proche de la limite ℓ, la précision de l'ordinateur peut devenir insuffisante et mener à des divisions par zéro.

De plus, il arrive que la limite ℓ soit inconnue *a priori*.

0. Quelle est la vitesse de convergence d'une suite géométrique (convergente) ? d'une série géométrique ?

1. Voici un exemple où l'on ne connaît pas la limite : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Notons S la somme de cette série.

   (a) Montrer que $\quad \forall k > 1, \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire un encadrement de $\quad S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

   (c) Quelle est la vitesse de convergence de cette série ?

Il s'agit d'établir maintenant un résultat théorique permettant d'estimer κ : la vitesse de convergence d'une suite (convergente) : (x_n) sans connaître sa limite ℓ :

Théorème: si κ existe et est différent de 1 et si $x_n \neq x_{n-1}$ à partir d'un certain rang, alors

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \kappa$$

Ainsi, $\widetilde{\kappa}_n = \frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_n-x_{n-1}|}$ constitue un autre estimateur de κ (valable si κ existe et ne vaut pas 1).

Pour le démontrer, on se place dans le cas plus simple où $x_n - \ell > 0$ et on pose $\varepsilon_n = \frac{x_{n+1}-\ell}{x_n-\ell} - \kappa$: terme général d'une suite qui tend vers 0.

2. (a) Montrer que, $\forall n \geqslant 0$, $x_{n+1} - x_n$ peut alors s'écrire $(x_n - \ell)(\kappa - 1 + \varepsilon_n)$.
   (b) Terminer la preuve.

Remarquez que si $\kappa = 1$, cet argument ne fonctionne pas de par la forme indéterminée.

Ce théorème est d'autant plus pratique lorsque les termes de la suite se calculent par récurrence (*i.e.* lorsqu'il est facile de calculer x_{n+1} à partir de x_n).

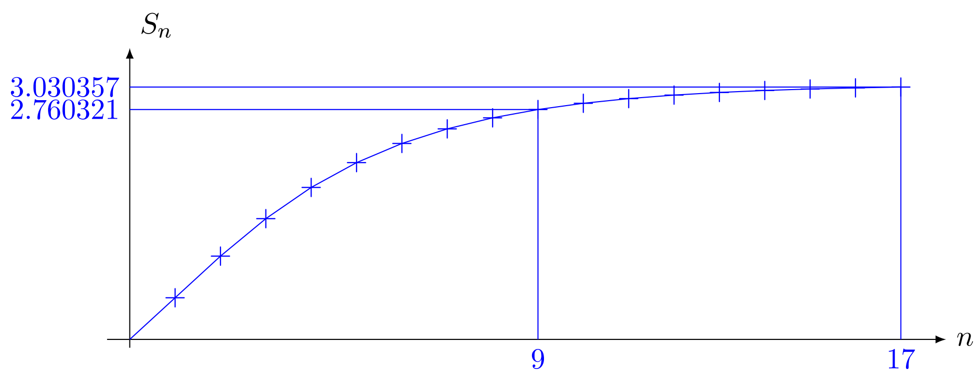
3. Dans le cas où x_n est la somme partielle d'une série convergente, que devient le quotient $\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}$?
   À quel moment la limite de ce quotient apparaît dans le cours sur les séries ?
   Trouver alors dans le cours et les TD des exemples de séries à convergence géométrique et à convergence rapide.

B. Un exemple complet avec accélération de convergence

Dans la suite de cette séance, on étudie la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n}{2^n + 4^n}$.

4. (a) Montrer que cette série converge (on note S sa somme).
   (b) Calculer le coefficient de convergence de la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^k + 4^k}$.

Pour avoir une idée de la valeur de S, on calcule typiquement les premières valeurs de S_n :



Nous voyons maintenant une méthode qui permet de construire une suite : (T_n) qui converge plus vite vers S que (S_n) au sens où son coefficient de convergence est plus proche de 0.

L'idée est de choisir pour T_n un barycentre entre S_{n+1} et S_n : $\quad T_n = \dfrac{S_{n+1} - \lambda \cdot S_n}{1 - \lambda}$.

Il reste à choisir le poids relatif (λ) qui peut éventuellement dépendre de n.

Ce qu'on veut, c'est que $S - T_n$ tende plus vite vers 0 que $S - S_n$. Or, après calculs

$$\frac{S - T_n}{S - S_n} = \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{S - S_{n+1}}{S - S_n} - \lambda\right)$$

L'idéal serait donc de choisir $\lambda = \frac{S-S_{n+1}}{S-S_n}$... mais comme on cherche à approximer S, on va remplacer cette expression, soit par sa limite : κ, soit par son estimateur $\widetilde{\kappa}_n$.

5. Implémenter ceci et comparer les vitesses de convergence de chaque méthode.
6. Montrer que $S - S_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^n + \mathrm{o}\left(\left(\frac{3}{8}\right)^n\right)$.
   En déduire la vitesse de convergence de (T_n).

Inspiré de `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/AgregInterne/Oral1/Plans256.pdf`.